Damien [illegible]

Exercices corrigés d'algèbre linéaire

Tome 2

math

RAPPELS DE COURS ET EXERCICES CORRIGÉS

LMD

Licence de mathématiques, Licences scientifiques (L2)

de boeck

Licence Maîtrise Doctorat

Chimie

CACHAU-HERREILLAT D., *Des expériences de la famille Acide-Base*. 2e éd.
DEPOVERE P., *Chimie générale*. 3e éd.
DEPOVERE P., *Chimie organique*. 2e éd.
MOUSSARD C., *Biologie moléculaire et Biochimie des communications cellulaires*

Biologie

TANZARELLA S., *Perception et communication chez les animaux*

Mathématiques

BOGAERT P., *Probabilités pour scientifiques et ingénieurs*
COTTET-EMARD F., *Analyse et convergence*
COTTET-EMARD F., *Algèbre et réduction*
ÉTIENNE D., *Exercices corrigés d'algèbre linéaire. Tome 1*
ÉTIENNE D., *Exercices corrigés d'algèbre linéaire. Tome 2*
MARCHAND M., *Outils mathématiques pour l'informaticien*. 2e éd.

Physique

BECHERRAWY T., *Optique géométrique*
BIEMONT E., *Spectroscopie atomique*

Méthodologie

POCHET B., *Méthodologie documentaire*. 2e éd.

Damien Étienne

Exercices corrigés d'algèbre linéaire

Tome 2

maths

RÉSUMÉ DE COURS ET EXERCICES CORRIGÉS

de boeck

Table des matières

Chapitre 1

Diagonalisation des endomorphismes

1. Rappels de cours

a) Rappel des principales définitions et propriétés.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

Soient f un endomorphisme de E et A sa matrice dans une base de E.

Soient x un vecteur non nul de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) Définitions

▶ Vecteur propre

On dit que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si :

$$f(x) = \lambda x.$$

▶ Écriture matricielle

Le vecteur x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si:

$$Ax = \lambda x$$

ou

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

▶ Sous-espace propre

On appelle sous espace propre de A associé à la valeur propre λ, l'espace vectoriel

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

▸ Polynôme caractéristique

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme noté P défini par:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

2) Propriétés

- Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique de A. L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A et est noté $Sp(A)$.

▸ Théorème

Notons $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ les valeurs propres de A. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

i) la matrice A est diagonalisable

ii) il existe une base formée des vecteurs propres de A dans laquelle la matrice A est diagonale.

iii) il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

iv) $E = \ker(A - \lambda_1 I) \oplus \ker(A - \lambda_2 I) \oplus ... \oplus \ker(A - \lambda_n I)$.

v) $\dim E = \dim \ker(A - \lambda_1 I) + \dim \ker(A - \lambda_2 I) + ... + \dim \ker(A - \lambda_n I)$.

▸ Conséquence

Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

▸ Un exemple: le cas des matrices symétriques réelles

Toute matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{R}$ est diagonalisable.

b) Méthode de diagonalisation d'une matrice.

i) Calcul du polynôme caractéristique de A.

ii) Recherche des racines du polynôme caractéristique de A et obtention de l'ensemble des valeurs propres de A: $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

iii) Recherche d'une base des sous-espaces propres $\ker(A - \lambda_i I)$ pour $i \in \{1, ..., n\}$.

iv) Formation de la matrice de passage P dont les colonnes sont formées des vecteurs trouvés précédemment.

v) Calcul de l'inverse de la matrice P et de $P^{-1}AP$. Obtention d'une matrice diagonale où figurent les valeurs propres de A sur la diagonale.

c) Applications de la diagonalisation

Dans ce qui suit, A est une matrice diagonalisable, $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et P une matrice inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

1) Puissance d'une matrice

Pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$A^m = P \times \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} \times P^{-1}.$$

2) Suite définie par une relation de récurrence

Soit (U_N) la suite définie par $U_0 \in \mathbb{R}^n$ et la relation $U_{N+1} = AU_N$ pour $N \in \mathbb{N}$.

Le terme général U_N de cette suite est défini par :

$$U_N = A^N U_0.$$

3) Résolution d'équations différentielles

Soit Z_0 un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$.

La solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dZ}{dt}(t) = AZ(t) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Z(t) = P \times \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \times P^{-1} Z_0.$$

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

Trouver les couples (x, y) dans $\mathbb{C}^2$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admette le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre.

Exercice 2

Soit $E = vect\{f_k : x \mapsto f_k(x) = e^{kx}, 0 \leq k \leq 4\}$ et l'application Φ définie par :

$$\forall f \in E, \Phi(f) = f'' - 3f' + 2f.$$

1) Vérifier que, pour tout $f \in E$, $f'' - 3f' + 2f \in E$.

2) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

3) Pour $0 \leq k \leq 4$, calculer $\Phi(f_k)$ et en déduire les valeurs propres de Φ et une base de vecteurs propres de E.

Exercice 3

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A puis les valeurs propres de A.

2) Déterminer une base de $\ker A$ et de $\ker(A - 4I)$.

3) Donner alors une base de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs propres de A.

Que peut-on dire de A?

Exercice 4

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \text{ b) } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \text{ c) } A_3 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \text{ e) } A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Exemples de matrices non diagonalisables

1) Montrer que les matrices suivantes ne sont pas diagonalisables :

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \text{ b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que la matrice suivante est non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Diagonaliser A puis trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Calculer $D_n = \det(A + 2\cos(\theta)I)$ par récurrence.

2) En déduire les valeurs propres de A.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^n.

2) Soit $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = AU_n$.

Déterminer U_n en fonction de n.

Exercice 9 Suite récurrente

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_{n+3} = -3u_{n+2} + u_{n+1} + 3u_n, \ (u_0,\ u_1,\ u_2 \text{ sont donnés}).$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2) Diagonaliser A.

3) Calculer A^n.

4) En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de n.

5) Préciser la suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_{n+3} = -3u_{n+2} + u_{n+1} + 3u_n \\ u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = -1. \end{cases}$$

Exercice 10 Résolution d'un système différentiel

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

1) Diagonaliser A.

2) Résoudre le système différentiel: $\dfrac{dX}{dt}(t) = AX(t)$.

3) Préciser la solution vérifiant:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Exercice 11

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

On note y une solution de cette équation différentielle et on pose:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

1) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\dfrac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.

2) Calculer le polynôme caractéristique de A.

3) Diagonaliser A.

4) Résoudre le système différentiel: $\dfrac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.

5) En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

6) Préciser celle vérifiant le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = 4. \end{cases}$$

Exercice 12

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 et soit l'application $u : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X],\ u(P) = X(X-1)P' - 4XP.$$

1) Vérifier que u est un endomorphisme de E.
2) Soit $\mathcal{B} = \{e_1 = 1\,;\, e_2 = X\,;\, e_3 = X^2\,;\, e_4 = X^3\,;\, e_5 = X^4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. Décomposer dans la base $\mathcal{B}$ les polynômes $u(e_i)$ pour $i \in \{1,\ldots,5\}$.
3) En déduire la matrice A de u relativement à la base $\mathcal{B}$.
4) Diagonaliser A.

Exercice 13

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et soit l'application Φ définie par :

$$u : \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto u(P) = (X-1)P'. \end{cases}$$

Déterminer la matrice de u dans la base canonique de E et montrer que u est diagonalisable.

Exercice 14

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et soit l'application Φ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) = (X+1)(X-3)P' - XP.$$

1) Soit P un vecteur propre de Φ. Montrer, en considérant les termes de plus haut degré que $\deg P \leq 1$.
2) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 15

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2) Chercher deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.
3) Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Ecrire la matrice de φ dans cette base.

5) Résoudre le système différentiel: $\dfrac{dX}{dt} = AX$.

Indication

On cherchera les solutions particulières des équations différentielles avec second membre intervenant dans la question 5) *sous la forme* $(\alpha t + \beta)e^t$.

Exercice 16

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle:

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

On note y une solution de cette équation différentielle et on pose:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

1) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\dfrac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.

2) Calculer le polynôme caractéristique de A.

3) Diagonaliser A.

4) Résoudre le système différentiel $\dfrac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.

5) En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle:

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

6) Préciser celle vérifiant le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 2. \end{cases}$$

3. Corrigés des exercices

Exercice 1

Il s'agit de trouver trois réels x, y et la valeur propre associée λ tels que :

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5 \\ 2y+4 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+5=\lambda \\ 2y+4=2\lambda \\ 3\lambda=6, \end{cases}$$

dont la résolution donne aisément :

$$\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ \lambda=2. \end{cases}$$

Exercice 2

1) Prenons $f \in E$, alors f s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha + \beta e^{x} + \gamma e^{2x} + \delta e^{3x} + \varepsilon e^{4x}.$$

Le calcul de $f'' - 3f' + 2f$ donne facilement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f'' - 3f' + 2f)(x) &= 2\alpha + 2\delta e^{3x} + 6\varepsilon e^{4x} \\ &= 2\alpha f_0(x) + 2\delta f_3(x) + 6\varepsilon f_4(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $f'' - 3f' + 2f \in E$.

2) D'après ce qui précède, on a clairement que :

$$\forall f \in E, \Phi(f) \in E.$$

De plus, pour tout f et g dans E et pour tout λ dans $\mathbb{R}$, on montre facilement que:

$$\begin{cases} \Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g), \\ \Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f). \end{cases}$$

On en déduit que Φ est un endomorphisme de E.

3) On a facilement :

$$\begin{cases} \Phi(f_0) = 0 \times f_0, \\ \Phi(f_1) = 1 \times f_1, \\ \Phi(f_2) = 2 \times f_2, \\ \Phi(f_3) = 3 \times f_3, \\ \Phi(f_4) = 4 \times f_4. \end{cases}$$

Comme la famille $\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est une base de E, alors, d'après les relations précédentes, elle est aussi une base de vecteurs propres de E. On en déduit que l'endomorphisme Φ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont :

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Exercice 3

1) Calculons tout d'abord le polynôme caractéristique de A:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$C1 \to C1 + C2 + C3 + C4$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(4-\lambda)\lambda\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= -(4-\lambda)\lambda\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\lambda^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda)\lambda^3.$$

L'ensemble des valeurs propres de A est donc $Sp(A) = \{0,4\}$.

2) Déterminons une base de $\ker A$:

Soit $(x,y,z,t) \in \ker A$. Alors, on a:

$$x+y+z+t=0,$$

soit:

$$\begin{cases} x = -y-z-t \\ y = y \\ z = z \\ t = t \end{cases} \quad , \quad (y,z,t) \in \mathbb{R}^3.$$

On en déduit que $\ker A$ est l'hyperplan engendré par la famille de vecteurs:

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Déterminons une base de $\ker(A-4I)$:

Soit $(x, y, z, t) \in \ker(A - 4I)$. Alors :

$$\begin{cases} -3x + y + z + t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \\ x + y + z - 3t = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ -3x + y + z + t = 0. \end{cases}$$

La méthode du pivot de Gauss donne successivement :

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ 2z - 2t = 0 \\ 2y - 2t = 0 \\ 4y + 4z - 8t = 0 \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ 2z - 2t = 0 \\ 2y - 2t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ t = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que $\ker(A - 4I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) Une base de $\mathbb{R}^4$ formée par des vecteurs propres de A est donc:

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

On en déduit que la matrice A est diagonalisable.

Exercice 4

a) Diagonalisation de A_1

- On calcule le polynôme caractéristique de A_1.

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ -2 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ -2 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & -\lambda\\ -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda(1-\lambda)(1-\lambda).$$

On en déduit que les valeurs propres de A_1 sont: 0, 1, 1.

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 0

Soit $(x,y,z)\in\ker(A_1)$. Alors on a:

$$\begin{cases}2x+z=0\\ x+y+z=0\\ -2x-z=0,\end{cases}$$

soit:

$$\begin{cases}x=x\\ y=x\\ z=-2x\end{cases},\ x\in\mathbb{R}.$$

On en déduit que :

$$\ker(A_1) = vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A_1 - I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 0 \\ -2x - 2z = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\{x + z = 0.$$

On a donc :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \quad ,(x, y) \in \mathbb{R}^2. \\ z = -x \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A_1 - I) = vect\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

b) Diagonalisation de A_2

- On calcule le polynôme caractéristique de A_2 :

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}$$
$$= (-\lambda)\left[\lambda^2 - 1\right] - (-\lambda)$$
$$= -\lambda^3 + \lambda - (-\lambda)$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda$$
$$= -\lambda\left(\lambda^2 - 2\right).$$

On en déduit que les valeurs propres de A_2 sont : $0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$. De plus, comme A_2 a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors A_2 est diagonalisable.

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A_2)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases}, x \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que :

$$\ker(A_2) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

  Soit $(x, y, z) \in \ker\left(A_2 - \sqrt{2}I\right)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ -y + \sqrt{2}z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \\ y = y \\ z = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}, y \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que :

$$\ker(A_2 - \sqrt{2}I) = vect\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

Soit $(x, y, z) \in \ker\left(A_2 + \sqrt{2}I\right)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ -y - \sqrt{2}z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = \frac{y}{\sqrt{2}} \\ y = y \quad , y \in \mathbb{R}^2. \\ z = \frac{-y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A_2 + \sqrt{2}I) = vect\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}.$$

c) Diagonalisation de A_3

- On calcule le polynôme caractéristique de A_3 :

$$\det\begin{pmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 11-\lambda & 0 & 5 \\ -5 & -\lambda & -3 \\ 5 & -\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}, L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$= \begin{vmatrix} 11-\lambda & 0 & 5 \\ -10 & 0 & -6+\lambda \\ 5 & -\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\begin{vmatrix} 11-\lambda & 5 \\ -10 & -6+\lambda \end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$= \lambda\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda \\ -10 & -6+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -10 & -6+\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= \lambda(1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -16+\lambda & -6+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(1-\lambda)(16-\lambda).$$

On en déduit que les valeurs propres de A_3 sont : 0, 1, 16. De plus, comme A_3 a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors A_3 est diagonalisable.

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 0

Soit $(x, y, z) \in \ker(A_3)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ \dfrac{8}{5}y - \dfrac{8}{5}z = 0 \end{cases}$$

enfin :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z\,, z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A_3) = vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 1

Soit $(x, y, z) \in \ker(A_3 - I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 10x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 0 \\ -5x + 2y - 3z = 0. \\ 10x - 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire par la méthode de Gauss donne successivement :

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} x = y \\ y = y \quad , y \in \mathbb{R}. \\ z = -y \end{cases}$$

On en déduit que:

$$\ker(A_3 - I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 16

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A_3 - 16I)$. Alors, on a:

$$\begin{cases} -5x - 5y + 5z = 0 \\ -5x - 13y - 3z = 0 \\ 5x - 3y - 13z = 0 \end{cases}$$

soit:

$$\begin{cases} -5x - 5y + 5z = 0 \\ -8y - 8z = 0 \\ -8y - 8z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = y \quad , y \in \mathbb{R}^2. \\ z = -y \end{cases}$$

On en déduit que:

$$\ker(A_3 - I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

d) Diagonalisation de A_4

- On calcule le polynôme caractéristique de A_4 :

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & a & a^2 \\ 0 & -\lambda & -a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$$

On en déduit que les valeurs propres de A_4 sont: $0, 1, -1$. De plus, comme A_4 a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors A_4 est diagonalisable.

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 0

  Soit $(x,y,z)\in\ker(A_4)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -x+ay+a^2z=0 \\ -az=0 \\ z=0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x=ay \\ y=y \quad ,y\in\mathbb{R}. \\ z=0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A_4)=vect\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 1

  Soit $(x,y,z)\in\ker(A_4-I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -2x+ay+a^2z=0 \\ -y-az=0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} -2x=0 \\ -y=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-az,\ z\in\mathbb{R}. \\ z=z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A_4-I)=vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre -1.

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A_4 + I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} ay + a^2 z = 0 \\ y - az = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0,\ x \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A_4 + I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

e) Diagonalisation de A_5

On calcule le polynôme caractéristique de A_5 :

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -\lambda & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -d \\ 0 & -\lambda & -d & 0 \\ 0 & d & -\lambda & 0 \\ d & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 \\ \alpha & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ -\lambda & -\alpha & 0 \\ \alpha & -\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left[-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}\right]$$

$$- \alpha\left[-\alpha \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix}\right]$$

$$= -\lambda\left[-\lambda^3 - \alpha^2\lambda\right] + \alpha^2\left(\lambda^2 + \alpha^2\right)$$

$$= \lambda^4 + \alpha^2\lambda^2 + \alpha^2\left(\lambda^2 + \alpha^2\right)$$

$$= \lambda^4 + \alpha^2\lambda^2 + \alpha^2\left(\lambda^2 + \alpha^2\right)$$

$$= \lambda^4 + 2\alpha^2\lambda^2 + \alpha^4$$

$$= \left(\lambda^2 + \alpha^2\right)^2.$$

On en déduit que les valeurs propres de A_5 sont $i\alpha$ et $-i\alpha$ $(\alpha \neq 0)$.

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre $i\alpha$

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A_5 - i\alpha I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -i\alpha x - \alpha t = 0 \\ -i\alpha y - \alpha z = 0 \\ -i\alpha y - \alpha z = 0 \\ -i\alpha x - \alpha t = 0 \end{cases}$$

  soit :

$$\begin{cases} -ix - t = 0 \\ -iy - z = 0 \end{cases}$$

  c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = it \\ y = iz \\ z = z \\ t = t \end{cases}, (z,t) \in \mathbb{R}^2.$$

  On en déduit que :

$$\ker(A_5 - i\alpha I) = vect\left\{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre $-i\alpha$

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A_5 + i\alpha I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} i\alpha x - \alpha t = 0 \\ i\alpha y - \alpha z = 0 \\ i\alpha y - \alpha z = 0 \\ i\alpha x - \alpha t = 0 \end{cases}$$

  soit :

$$\begin{cases} ix - t = 0 \\ iy - z = 0 \\ iy - z = 0 \\ ix - t = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = -it \\ y = -iz \\ z = z \\ t = t \end{cases}, (z,t) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que :

$$\ker(A_5 + i\alpha I) = vect\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 5

1) a) Etude de A_1

- On calcule le polynôme caractéristique de A_1 :

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2(1-\lambda) = (1-\lambda)^3.
\end{aligned}$$

On en déduit que A_1 admet une unique valeur propre : 1.

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 1

Soit $(x,y,z) \in \ker(A_1 - I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases}, (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que :

$$\ker(A_1 - I) = vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

On remarque que :

$$\dim\ker(A_1 - I) = 2 \neq 3,$$

ce qui signifie que la dimension du sous-espace propre $\ker(A_1 - I)$ est différente de la multiplicité de la valeur propre 1 dans le polynôme caractéristique. On en déduit que la matrice A_1 n'est pas diagonalisable.

b) Étude de A_2

- On calcule le polynôme caractéristique de A_2 :

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_3$$

$$= \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1+\lambda & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda)\begin{vmatrix}-1 & 2-\lambda \\ -\lambda & 1\end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= -(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2-\lambda \\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda \\ 1 & 1\end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

On en déduit que A_2 admet un unique valeur propre : 1.

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 1

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A_2 - I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que :

$$\ker(A_1 - I) = vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

On remarque que :

$$\dim \ker(A_1 - I) = 1 \neq 3.$$

La dimension du sous-espace propre $\ker(A_1 - I)$ est différente de la multiplicité de la valeur propre 1 dans le polynôme caractéristique. On en déduit que la matrice A_2 n'est pas diagonalisable.

2) On calcule le polynôme caractéristique de A_3 :

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Le polynôme caractéristique de A_3 n'ayant pas de racines dans $\mathbb{R}$, on en déduit que A_3 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Par contre, ce polynôme admet des racines dans $\mathbb{C}$: $-i$ et i.

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre i.

  Soit $(x, y) \in \ker(A_3 - iI)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -ix - y = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x - iy = 0 \\ x - iy = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = iy \\ y = y \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que :

$$\ker(A_3 - iI) = vect\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre $-i$.

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A_3 + iI)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x + iy = 0 \\ x + iy = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = -iy \\ y = y \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que :

$$\ker(A_3 + iI) = vect\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 6

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = (X - 9)(X - 4)(X - 1).$$

Comme A a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 9

  Soit $(x,y,z) \in \ker(A-9I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x - 5y = 0 \\ x + y - 8z = 0 \end{cases}$$

  soit :

$$\begin{cases} x = 5y \\ y = y \quad , y \in \mathbb{R}. \\ z = \dfrac{3}{4}y \end{cases}$$

  Le sous-espace propre associé à la valeur propre 9 est :

$$\ker(A-9I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 4

  Soit $(x,y,z) \in \ker(A-4I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 5x = 0 \\ x = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

  soit :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3z, \; z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

  Le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est :

$$\ker(A-4I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 1

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A - I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 8x = 0 \\ x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0\,,\ z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est :

$$\ker(A - I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

On définit la matrice de passage P par :

$$P = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de la matrice P est donné par :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{15} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{12} & \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

On a la relation suivante :

$$P^{-1}AP = \Delta = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$A = P\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Posons N la matrice définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que $N^2 = \Delta$ et écrire que :

$$A = P\Delta P^{-1} = PN^2P^{-1} = \left(PNP^{-1}\right).\left(PNP^{-1}\right).$$

Posons alors M la matrice définie par :

$$M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{5} & 2 & 0 \\ \dfrac{7}{30} & \dfrac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec ce choix de M, on a : $M^2 = A$.

Exercice 7

1) Calculons ce déterminant en effectuant un développement par rapport à la première colonne :

$$D_n = \det\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$D_n = 2\cos\theta \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant ci-dessus est D_{n-1} puisqu'on l'a obtenu en supprimant la première ligne et la première colonne de D_n.

Quant au second déterminant ci-dessus, on effectue à nouveau un développement par rapport à la première ligne et on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = D_{n-2}.$$

Ainsi, on obtient la relation de récurrence suivante,

$$D_n = 2(\cos\theta)D_{n-1} - D_{n-2},$$

que l'on peut écrire :

$$D_n - 2(\cos\theta)D_{n-1} + D_{n-2} = 0.$$

- Calculons D_n en fonction de n:

  On a: $D_1 = 2\cos\theta$ et $D_2 = 4\cos^2\theta - 1$.

  Formons l'équation caractéristique de la suite (D_n) :

  $$r^2 - (2\cos\theta)r + 1 = 0,$$

  de déterminant : $\Delta = (2\cos\theta)^2 - 4 = 4\left(\cos^2\theta - 1\right) = -4\sin^2\theta \leq 0$.

  Deux cas se présentent alors, suivant que $\Delta = 0$ ou que $\Delta < 0$, c'est-à-dire suivant que $\theta = k\pi$ ou que $\theta \neq k\pi$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$.

  1er cas : $\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

  L'équation caractéristique a une solution double :

  $$r_0 = \frac{-2\cos(k\pi)}{2} = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}.$$

On a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = (a+bn)r_0^n.$$

Calculons a et b.

Lorsque $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on a : $D_1 = (-1)^k$ et $D_2 = 4\left((-1)^{k+1}\right)^2 - 1 = 3$. On en déduit le système linéaire suivant :
$$\begin{cases}(-1)^{k+1}(a+b) = (-1)^k \\ a+2b = 3.\end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne :
$$\begin{cases}a+b = -1 \\ a+2b = 3,\end{cases}$$

c'est-à-dire :
$$\begin{cases}a = -5 \\ b = 4,\end{cases}$$

soit :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = (-1)^{n(k+1)}(4n-5).$$

2e cas : $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

Dans ce cas, $\Delta < 0$ et l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées :
$$\begin{cases}z = \dfrac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.\end{cases}$$

Le terme général D_n s'écrit donc :
$$D_n = a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta).$$

Calculons a et b.

Comme $D_1 = 2\cos\theta$ et $D_2 = 4\cos^2\theta - 1$, on en déduit le système linéaire suivant :
$$\begin{cases}a\cos\theta + b\sin\theta = 2\cos\theta \\ a\cos(2\theta) + b\sin(2\theta) = 4\cos^2\theta - 1.\end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire grâce aux formules de Cramer donne :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \cos(n\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\theta),$$

ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \frac{\sin\theta\cos(n\theta) + \cos\theta\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

2) On cherche les valeurs propres de A sous la forme $\lambda_k = -2\cos\theta_k$.

On doit avoir $D_n = 0$, soit $\sin((n+1)\theta_k) = 0$, donc :

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1},\ k \in \{0,\ldots,n\} \cup \{n+1,\ldots,2n+1\}.$$

De plus, θ_k ne peut pas être un multiple de π car, sinon, l'expression de D_n dans le cas exposé précédemment où $\theta_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ donnerait $D_n = (-1)^{n(k+1)}(4n-5)$ qui est non nul, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $k \neq 0$ et $k \neq n+1$.

On en déduit que :

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1},\ k \in \{1,\ldots,n\} \cup \{n+2,\ldots,2n+1\}.$$

En remarquant que :

$$\begin{cases} -2\cos\dfrac{\pi}{n+1} = -2\cos\dfrac{(n+2)\pi}{n+1}, \\ -2\cos\dfrac{2\pi}{n+1} = -2\cos\dfrac{(n+3)\pi}{n+1}, \\ \qquad\qquad \cdots \\ -2\cos\dfrac{n\pi}{n+1} = -2\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{n+1}, \end{cases}$$

on déduit que :

$$\left\{\lambda_k = -2\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k \in \{1,\ldots,n\} \cup \{n+2,\ldots,2n+1\}\right\}$$

$$= \left\{\lambda_k = -2\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k \in \{1,\ldots,n\}\right\}.$$

Le spectre de A vérifie donc la relation suivante:

$$\left\{\lambda_k = -2\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k \in \{1,\dots,n\}\right\} \subset Sp(A).$$

Par ailleurs, vu que $card\ Sp(A) \leq n$ et que:

$$card\left\{\lambda_k = -2\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k \in \{1,\dots,n\}\right\} = n,$$

on en déduit que:

$$Sp(A) = \left\{\lambda_k = -2\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k \in \{1,\dots,n\}\right\}.$$

Exercice 8

1) Diagonalisation de A

On calcule le polynôme caractéristique de A:

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix},\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont: 1, 2, 3. De plus, comme A a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

  Soit $(x,y,z) \in \ker(A-2I)$. Alors, on a:

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = y \\ y = y\,,\ y \in \mathbb{R}. \\ z = y \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A-2I) = vect\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A-3I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ \qquad\quad -y = 0 \\ \ x - y - z = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0,\ z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A-2I) = vect\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 3.

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A-I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ \qquad\quad -2y = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

soit :

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}, \; z \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que :

$$\ker(A - I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Posons P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \Delta.$$

On a facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix},$$

puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = P\Delta^n P^{-1} = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times 3^n & 1 - 2^n & 2 \times 2^n - 2 \times 3^n \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^n + 3^n & 1 - 2^n & 2 \times 2^n - 3^n \end{pmatrix}.$$

2) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre facilement que:

$$U_n = A^n U_0.$$

Ainsi:

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} 3\times 2^n - 4\times 3^n + 2 \\ 2 \\ 3\times 2^n - 2\times 3^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

1) Par récurrence, on montre facilement que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} X_n.$$

2) Diagonalisation de A

- Calculons tout d'abord le polynôme caractéristique de A:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & 1 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda-1)(-3-\lambda).$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont: $1, -1, -3$. De plus, comme A a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

  Soit $(x,y,z) \in \ker(A+I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ -y+z=0 \\ 3x+y-4z=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x=y \\ y=z \\ 3x+y-4z=0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x=y \\ y=y\,,\, y\in\mathbb{R}. \\ z=y \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A+I)=vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -1.

  Soit $(x,y,z) \in \ker(A+I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x=-y \\ y=y \quad ,\, y\in\mathbb{R}. \\ z=-y \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A+I)=vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -3.

Soit $(x,y,z)\in\ker(A+3I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases}3x+y=0\\3y+z=0\\3x+y=0\end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases}x=x\\y=-3x\,,\,x\in\mathbb{R}.\\z=9x\end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A-2I)=vect\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}\right\}.$$

Posons P la matrice définie par :

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-3\\1&-1&9\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}&\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\\frac{-3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{-1}{8}&0&\frac{1}{8}\end{pmatrix},$$

et on a :

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\Delta.$$

On a facilement que :

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix},$$

puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n &= P\Delta^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{8}+\frac{3}{4}(-1)^n-\frac{1}{8}(-3)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{8}-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{8}(-3)^n \\ \frac{3}{8}-\frac{3}{4}(-1)^n+\frac{3}{8}(-3)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{8}+\frac{1}{4}(-1)^n-\frac{3}{8}(-3)^n \\ \frac{3}{8}+\frac{3}{4}(-1)^n-\frac{9}{8}(-3)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{8}-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{9}{8}(-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4) Par récurrence sur n, on montre facilement que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0,\ o\grave{u}\ X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{3+6(-1)^n-(-3)^n}{8}u_0 + \frac{1-(-1)^n}{2}u_1 + \frac{1-2(-1)^n+(-3)^n}{8}u_2 \\ \frac{3-6(-1)^n+3(-3)^n}{8}u_0 + \frac{1+(-1)^n}{2}u_1 + \frac{1+2(-1)^n-3(-3)^n}{8}u_2 \\ \frac{3+6(-1)^n-9(-3)^n}{8}u_0 + \frac{1-(-1)^n}{2}u_1 + \frac{1-2(-1)^n+9(-3)^n}{8}u_2 \end{pmatrix}.$$

soit, après simplification :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\frac{3}{8}+\frac{3}{4}(-1)^n-\frac{1}{8}(-3)^n)u_0 + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n)u_1 + (\frac{1}{8}-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{8}(-3)^n)u_2.$$

5) En prenant $u_0 = 1 \,;\, u_1 = 0 \,;\, u_2 = -1$, on obtient facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3}{8}+\frac{3}{4}(-1)^n-\frac{1}{8}(-3)^n-(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{8}(-3)^n),$$

soit :

$$u_n = \frac{3}{8}+\frac{3}{4}(-1)^n-\frac{1}{8}(-3)^n-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}(-1)^n-\frac{1}{8}(-3)^n),$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n + (-1)^n.$$

Exercice 10

1) Diagonalisation de A

- On calcule le polynôme caractéristique de A.

$$\det\begin{pmatrix} 7-\lambda & -5 & -4 \\ 4 & -2-\lambda & -4 \\ 5 & -5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 & -4 \\ 4 & -2-\lambda & -4 \\ 5 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3.$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 & -4 \\ -2-\lambda & -2-\lambda & -4 \\ -2-\lambda & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 1 & -2-\lambda & -4 \\ 1 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3.$$

$$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda-2 \\ 1 & -2-\lambda & -4 \\ 1 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Les valeurs propres de A sont : $2, -2, 3$. De plus, comme A a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

Soit $(x, y, z) \in \ker(A - 2I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 5x - 5y - 4z = 0 \\ 4x - 4y - 4z = 0 \\ 5x - 5y - 4z = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 5x - 5y - 4z = 0 \\ 4x - 4y - 4z = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 5x - 5y - 4z = 0 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

soit, enfin :

$$\begin{cases} x = y \\ y = y \, , \, y \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A - 2I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -2

Soit $(x, y, z) \in \ker(A + 2I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 9x - 5y - 4z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \\ 5x - 5y = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 9x - 5y - 4z = 0 \\ x = y \\ x = z \end{cases}$$

soit, enfin :

$$\begin{cases} x = y \\ y = y \, , \, y \in \mathbb{R}. \\ z = y \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A+2I) = vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 3

  Soit $(x, y, z) \in \ker(A-3I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases}4x-5y-4z=0\\4x-5y-4z=0\\5x-5y-5z=0,\end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases}4x-5y-4z=0\\x-y-z=0,\end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases}y=0\\x=y+z,\end{cases}$$

soit, enfin :

$$\begin{cases}x=z\\y=0,\ z\in\mathbb{R}.\\z=z\end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A-3I) = vect\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

2) Résolution du système différentiel.

On pose P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \Delta.$$

Posons $Z = P^{-1}X$.

Le système différentiel $\dfrac{dX}{dt} = AX$ peut s'écrire :

$$\frac{dX}{dt} = P\Delta P^{-1}X,$$

soit :

$$P^{-1}\frac{dX}{dt} = \Delta P^{-1}X,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\left(P^{-1}X\right)}{dt} = \Delta\left(P^{-1}X\right),$$

soit, enfin :

$$\frac{dZ}{dt} = \Delta Z.$$

Posant $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{cases} z_1' = 2z_1 \\ z_2' = -2z_2 \\ z_3' = 3z_3, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} z_1 = Ae^{2t} \\ z_2 = Be^{-2t} \\ z_3 = Ce^{3t}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$X = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{2t} \\ Be^{-2t} \\ Ce^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{2t} + Be^{-2t} + Ce^{3t} \\ Ae^{2t} + Be^{-2t} \\ Be^{-2t} + Ce^{3t} \end{pmatrix}.$$

3) On a :

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B+C \\ A+B \\ B+C \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} A = -2 \\ B = 4 \\ C = -1. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$X(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 4e^{-2t} - e^{3t} \\ -2e^{2t} + 4e^{-2t} \\ 4e^{-2t} - e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

1) On montre facilement que :

$$\frac{dZ}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} Z.$$

2) On calcule le polynôme caractéristique de A.

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1-\lambda & -\lambda & 1\\ 1-\lambda & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -\lambda-1 & 1\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda-1)(2-\lambda).$$

Les valeurs propres de A sont donc: $1, -1, 2$. De plus, comme A a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

3) • Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Soit $(x, y, z) \in \ker(A - I)$. Alors, on a:

$$\begin{cases}-x + y = 0\\ -y + z = 0\\ -2x + y + z = 0,\end{cases}$$

soit:

$$\begin{cases}x = y\\ y = z\\ 2x = y + z,\end{cases}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases}x = y\\ y = y,\ y \in \mathbb{R}.\\ z = y\end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A-I) = vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -1

Soit $(x,y,z) \in \ker(A+I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ -2x+y+3z=0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x=-y \\ y=-z \\ 2x=y+3z, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x=-y \\ y=y \quad , y\in\mathbb{R}. \\ z=-y \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A+I) = vect\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 2

Soit $(x,y,z) \in \ker(A-2I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -2x+y=0 \\ -2y+z=0 \\ -2x+y=0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = 2y \\ 2x = y, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x \\ y = 2x \,, \, y \in \mathbb{R}. \\ z = 4x \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A - 2I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}.$$

4) On pose P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

avec :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \Delta.$$

Posons $Z = P^{-1}X$.

Le système différentiel $\dfrac{dX}{dt} = AX$ peut s'écrire :

$$\frac{dX}{dt} = P\Delta P^{-1}X,$$

soit :

$$P^{-1}\frac{dX}{dt} = \Delta P^{-1}X,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\left(P^{-1}X\right)}{dt} = \Delta\left(P^{-1}X\right),$$

soit, enfin :

$$\frac{dZ}{dt} = \Delta Z.$$

Posant $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{cases} z_1' = z_1 \\ z_2' = -1z_2 \\ z_3' = 2z_3, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} z_1 = Ae^t \\ z_2 = Be^{-t} \\ z_3 = Ce^{2t}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$X = PZ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^{-t} \\ Ce^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^t - Be^{-t} + Ce^{2t} \\ Ae^t + Be^{-t} + 2Ce^{2t} \\ Ae^t - Be^{-t} + 4Ce^{2t} \end{pmatrix}.$$

3) On a :

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B + C \\ A + B + 2C \\ A - B + 4C \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$y(t) = e^{t} - e^{-t} + e^{2t}.$$

Exercice 12

1) Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 4.

Le polynôme P s'écrit alors :

$$P(X) = aX^4 + Q(X),$$

où Q est un polynôme de dégré inférieur ou égal à 3.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
X(X-1)P' - 4XP &= X(X-1)\left(4aX^3 + Q'(X)\right) - 4X\left(aX^4 + Q(X)\right) \\
&= \left(X^2 - X\right)\left(4aX^3 + Q'(X)\right) - 4X\left(aX^4 + Q(X)\right) \\
&= 4aX^5 - 4aX^4 + \left(X^2 - X\right)Q'(X) - 4aX^5 - 4XQ(X) \\
&= -4aX^4 + \left(X^2 - X\right)Q'(X) - 4XQ(X).
\end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned}
\deg\left(X(X-1)P' - 4XP\right) &= \deg\left(-4aX^4 + \left(X^2 - X\right)Q'(X) - 4XQ(X)\right) \\
&\le \max\left[\deg\left(-4aX^4\right), \deg\left(\left(X^2 - X\right)Q'(X)\right), \deg\left(4XQ(X)\right)\right] \\
&\le 4,
\end{aligned}$$

on en déduit que l'application u est bien à valeurs dans E.

Par ailleurs, on montre facilement que, pour tout P et Q dans E et pour tout λ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} u(P+Q) = u(P) + u(Q) \\ u(\lambda P) = \lambda u(P). \end{cases}$$

2) On calcule :

$$\begin{cases} u(1) = -4X \\ u(X) = -3X^2 - X \\ u(X^2) = -2X^3 - 2X^2 \\ u(X^3) = -X^4 - 3X^3 \\ u(X^4) = -4X^4. \end{cases}$$

3) La matrice A de u est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4) On voit facilement que les valeurs propres de u sont : $0, -1, -2, -3, -4$. Comme les valeurs propres de u sont deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

  Soit $(x, y, z, t, v) \in \ker(A)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -4x - y = 0 \\ -3y - 2z = 0 \\ -2z - 3t = 0 \\ -t - 4v = 0 \end{cases}$$

  ce qui donne :

$$\begin{cases} x = v \\ y = -4v \\ z = 6v \\ t = -4v \\ v = v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

  Ainsi :

$$\ker(A) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

  c'est-à-dire :

$$\ker(u) = vect\left\{1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4\right\} = vect\left\{(X-1)^4\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -1

Soit $(x,y,z,t,v) \in \ker(A+I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} x = 0 \\ -4x = 0 \\ -3y - z = 0 \\ -2z - 2t = 0 \\ -t - 3v = 0 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -v \\ z = 3v \\ t = -3v \\ v = v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

Ainsi :

$$\ker(A+I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

c'est-à-dire :

$$\ker(u + Id_E) = vect\left\{-X + 3X^2 - 3X^3 + X^4\right\} = vect\left\{X(X-1)^3\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -2

Soit $(x,y,z,t,v) \in \ker(A+2I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -4x + y = 0 \\ -3y = 0 \\ -2z - t = 0 \\ -t - 2v = 0 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = v \\ t = -2v \\ v = v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

Ainsi :

$$\ker(A + 2I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

c'est-à-dire :

$$\ker(u + 2Id_E) = vect\left\{X^2 - 2X^3 + X^4\right\} = vect\left\{X^2(X-1)^2\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -3

  Soit $(x, y, z, t, v) \in \ker(A + 3I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -4x = 0 \\ -3y - z = 0 \\ -2z = 0 \\ -t - v = 0 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = -v \\ v = v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

Ainsi :

$$\ker(A + 3I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

c'est-à-dire:

$$\ker(u+3Id_E) = vect\left\{-X^3+X^4\right\} = vect\left\{X^3(X-1)\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -4

Soit $(x,y,z,t,v)\in\ker(A+4I)$. Alors, on a:

$$\begin{cases}4x=0\\-4x-y=0\\-3y-2z=0\\-2z-t=0\\-t=0\end{cases}$$

ce qui donne:

$$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\\t=0\\v=v\end{cases},\ v\in\mathbb{R}.$$

Ainsi:

$$\ker(A+4I) = vect\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

c'est-à-dire:

$$\ker(u+4Id_E) = vect\left\{X^4\right\}.$$

Exercice 13

En calculant $u(1)$, $u(X), u(X^2), \ldots, u(X^n)$, on obtient successivement:

$$\begin{cases}u(1)=0\\u(X)=X-1\\u(X^2)=2X-1\\\quad\vdots\\u(X^k)=kX^k-X^{k-1}\\\quad\vdots\\u(X^n)=nX^n-X^{n-1}.\end{cases}$$

Ainsi, la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & 0 \\ & 1 & -1 & & & & \\ & & 2 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & -1 & & \\ & & & & k & \ddots & \\ & & & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & & & & n \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\{0,1,2,...,n\}$. Comme les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

Cherchons un vecteur propre associé à la valeur propre $k \in \{0,1,2,...,n\}$.

Soit P un vecteur propre de u. Alors, on a :

$$(X-1)P' = kP,$$

ce qui donne :

$$\frac{P'}{P} = \frac{k}{X-1},$$

soit :

$$P(X) = \alpha(X-1)^k.$$

Les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $0,1,2,...,n$ sont respectivement :

$$\left\{1 ; X-1 ; (X-1)^2 ; ... ; (X-1)^k ; (X-1)^n\right\}.$$

L'endomorphisme u est bien diagonalisable.

Exercice 14

1) Soit P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ. Notons $p = \deg P$.

On a alors :

$$\Phi(P) = (X-1)(X-3)P' - XP = \lambda P.$$

Posons :

$$P(X) = X^p + Q(X),$$

où Q est un polynôme de dégré inférieur ou égal à $p-1$.

On remarque que $(X-1)(X-3)P'-XP-\lambda P=0$ donc cette relation s'écrit :

$$\begin{aligned}(X-1)(X-3)P'-XP-\lambda P &= \left(X^2-2X-3\right)\left(X^p+Q(X)\right)-(X+\lambda)\left(X^p+Q(X)\right)\\ &= \left(X^2-2X-3\right)\left(pX^{p-1}+Q'(X)\right)-(X+\lambda)\left(X^p+Q(X)\right)\\ &= (p-1)X^{p+1}-(2p+\lambda)X^p-3pX^{p-1}\\ &\quad +\left(X^2-2X-3\right)Q'(X)-(X+\lambda)Q(X)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Le polynôme $(X-1)(X-3)P'-XP-\lambda P$ étant le polynôme nul, on en déduit que tous ses coefficients sont nuls, et en particulier que :

$$p=1.$$

2) D'après la question précédente, $p=1$, donc $\deg Q \leq p-1=0$, donc le polynôme Q est le polynôme constant. Notons alors :

$$\forall X \in \mathbb{R},\ Q(X)=C.$$

Comme, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $Q(X)=C$, alors, pour tout $X\in\mathbb{R}$, $Q'(X)=0$ et la relation $(X-1)(X-3)P'-XP-\lambda P=0$ s'écrit plus simplement :

$$\begin{aligned}(X-1)(X-3)P'-XP-\lambda P &= -(2+\lambda)X-3-(X+\lambda)C\\ &= (-2-\lambda-Q)X-(3+\lambda C)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de ce polynôme, on en déduit le système linéaire suivant d'inconnues (λ, C) :

$$\begin{cases}-2-\lambda-C=0 & (1)\\ 3+\lambda C=0. & (2)\end{cases}$$

La relation (1) donne immédiatement que :

$$C=-\lambda-2.$$

En remplaçant cette dernière expression dans (2), on en déduit que :

$$3-\lambda(\lambda+2)=0.$$

On aboutit à l'équation du second degré suivante :

$$-\lambda^2-2\lambda+3=0,$$

dont la résolution donne :

$$\lambda=1\,;\,\lambda=-3.$$

Cherchons un vecteur propre associé à chacunes des valeurs propres trouvées précédemment.

- 1er cas : $\lambda = 1$

  Dans ce cas, $C = -3$ et donc le polynôme P défini par :
$$P(X) = X - 3$$
  est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre 1.

- 2e cas : $\lambda = -3$

  Dans ce cas, $C = 1$ et donc le polynôme P défini par :
$$P(X) = X + 1$$
  est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre -3.

Exercice 15

1) On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -3 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1-\lambda & 2-\lambda & -3 \\ 1-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2.$$

Les valeurs propres de A sont donc : $\{0,1\}$.

- Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 :

  Soit $(x,y,z) \in \ker(A - I)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = y \\ y = y \,, y \in \mathbb{R}. \\ z = y \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est :

$$\ker(A - I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

On remarque que $\dim\ker(A-I) = 1 \neq 2$, c'est-à-dire que $\dim\ker(A-I)$ est différent de la multiplicité de la valeur propre 1 dans le polynôme caractéristique. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

2) Étudions le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

Soit $(x, y, z) \in \ker(A)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + z = 0, \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = y \quad , y \in \mathbb{R}. \\ z = 2y \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est :

$$\ker(A) = vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Deux vecteurs propres de A linéairement indépendants sont, par exemple :

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Complétons ces deux vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^3$:

On peut choisir, par exemple, le vecteur $e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4) La matrice de A dans cette base s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

En calculant $Tr(A)$, on en déduit que : $\alpha = 1$.

On écrit Ae_3' sous la forme : $Ae_3' = \gamma e_1' + \beta e_2' + e_3'$, ce qui donne le système linéaire :

$$\begin{cases} -1 = \gamma + 2\beta + 1 \\ 2 = \gamma + \beta \\ -2 = \gamma + 2\beta \end{cases}$$

que l'on peut écrire plus simplement :

$$\begin{cases} \gamma + \beta = 2 \\ \gamma + 2\beta = -2 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \beta = -4 \\ \gamma = 6 \end{cases}.$$

On en déduit que la matrice A dans cette base est :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Posons P la matrice de changement de bases définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors la relation liant A et A' :

$$P^{-1}AP = A'.$$

L'équation $\frac{dX}{dt}(t) = AX(t)$ s'écrit donc :

$$\frac{dX}{dt}(t) = PA'P^{-1}X(t),$$

soit :

$$P^{-1}\frac{dX}{dt}(t) = \frac{d\left(P^{-1}X\right)}{dt}(t) = A'P^{-1}X(t).$$

Posons $Z = P^{-1}X$. On en déduit que :

$$\frac{dZ}{dt}(t) = A'Z(t),$$

c'est-à-dire, en notant $Z = (z_1, z_2, z_3)$,

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) + 6z_3(t) & (1) \\ z_2'(t) = -4z_3(t) & (2) \\ z_3'(t) = z_3(t) & (3) \end{cases}$$

- Résolution de (3)

  La résolution de l'équation différentielle (3) donne facilement :

$$z_3(t) = Ae^t.$$

- Résolution de (2)

  Compte tenu du résultat précédent, l'équation différentielle (2) devient :

$$z_2'(t) = -4Ae^t,$$

  soit, par calcul de primitives, $z_2(t) = -4Ae^t + B$.

- Résolution de (1)

  Compte tenu de l'expression de z_2 trouvée précédemment, l'équation (1) s'écrit :

$$z_1'(t) = z_1(t) + 6Ae^t.$$

  La solution de l'équation différentielle sans second membre est $z_1(t) = Ce^t$.

  Une solution particulière, que l'on a préalablement cherchée sous la forme $(\alpha t + \beta)e^t$, est donnée grâce à un calcul d'identification des coefficients α et β par $6Ate^t + \beta e^t$.

  La solution générale de l'équation (1) est donnée par la somme de la solution de l'équation différentielle sans second membre et de la solution particulière, c'est-à-dire:

$$z_1(t) = 6Ate^t + Ce^t.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} z_1(t) = 6Ate^t + Ce^t \\ z_2(t) = -4Ae^t + B \\ z_3(t) = Ae^t. \end{cases}$$

Or, X est donné par :

$$X(t) = PZ(t),$$

donc :

$$\begin{cases} x(t) = 6Ate^t + Ce^t + 2\left(-4Ae^t + B\right) + Ae^t \\ y(t) = 6Ate^t + Ce^t - 4Ae^t + B \\ z(t) = 6Ate^t + Ce^t + 2\left(-4Ae^t + B\right), \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x(t) = 6Ate^t - 7Ae^t + Ce^t + 2B \\ y(t) = 6Ate^t - 4Ae^t + Ce^t + B \\ z(t) = 6Ate^t - 8Ae^t + Ce^t + 2B. \end{cases}$$

Exercice 16

1) On a :

$$\frac{dZ}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} Z.$$

2) On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & 1 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(-\lambda-1)(1-\lambda)+2] \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2+1\right).
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres de A sont donc $1, -i, i$. De plus, comme A a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

3) • Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Soit $(x, y, z) \in \ker(A - I)$. Alors, on a :

$$
\begin{cases} -x+y=0 \\ -y+z=0 \\ x-y=0, \end{cases}
$$

soit :

$$
\begin{cases} x=y \\ y=y\,,\, y \in \mathbb{R}. \\ z=y \end{cases}
$$

On en déduit que :

$$
\operatorname{Ker}(A-I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.
$$

• Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre $-i$.

Soit $(x, y, z) \in \ker(A + iI)$. Alors, on a :

$$
\begin{cases} ix+y=0 \\ iy+z=0 \\ x-y+(1+i)z=0, \end{cases}
$$

soit :

$$\begin{cases} y = -ix \\ z = -iy \\ x = y - (1+i)\,z, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = iy \\ y = y \quad , y \in \mathbb{R}. \\ z = -iy \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A + iI) = vect\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}.$$

- Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre $+i$.

Soit $(x, y, z) \in \ker(A - iI)$. Alors, on a :

$$\begin{cases} -ix + y = 0 \\ -iy + z = 0 \\ x - y + (1-i)\,z = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} y = ix \\ z = iy \\ x = y - (1-i)\,z, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = -iy \\ y = y \quad , y \in \mathbb{R}. \\ z = iy \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(A - iI) = vect\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}.$$

4) On pose P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} - \frac{1}{4}i & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i \\ \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} - \frac{1}{4}i \end{pmatrix},$$

avec :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \Delta.$$

Posons $X = P^{-1}Z$.

Le système différentiel $\frac{dZ}{dt} = AZ$ peut s'écrire :

$$\frac{dZ}{dt} = P\Delta P^{-1}Z,$$

soit :

$$P^{-1}\frac{dZ}{dt} = \Delta P^{-1}Z,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\left(P^{-1}Z\right)}{dt} = \Delta\left(P^{-1}Z\right),$$

soit, enfin :

$$\frac{dX}{dt} = \Delta X.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{cases} z_1' = z_1 \\ z_2' = -iz_2 \\ z_3' = iz_3, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} z_1 = Ae^t \\ z_2 = Be^{-it} \\ z_3 = Ce^{it}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$Z(t) = PX(t) = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^{-it} \\ Ce^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^t + iBe^{-it} - iCe^{it} \\ Ae^t + Be^{-it} + Ce^{it} \\ Ae^t - iBe^{-it} + iCe^{it} \end{pmatrix}.$$

3) On a :

$$Z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + iB - iC \\ A + B + C \\ A - iB + iC \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = \dfrac{1+i}{2} \\ C = \dfrac{1-i}{2}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$y(t) = e^t + i\left(\frac{1+i}{2}\right)e^{-it} - i\left(\frac{1-i}{2}\right)e^{it}.$$

En remarquant que $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ et que $e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$, on en déduit une forme plus simple pour y :

$$y(t) = e^t - \cos(t) + \sin(t).$$

Chapitre 2

Réduction de Jordan

1. Rappels de cours

a) Réduction de Jordan d'une matrice A

La réduction de Jordan consiste à trouver une base dans laquelle la matrice est diagonale par blocs, chacun des blocs figurant sur la diagonale étant de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

où λ est une valeur propre de A.

Pour trouver cette réduction, on procède de la façon suivante :

- On cherche les valeurs propres de A.
- Pour chaque valeur propre λ de A, on effectue les manipulations suivantes :
- On construit la suite emboitée suivante et on calcule la dimension de chaque noyau:

$$\ker(A-\lambda I) \subsetneq \ker(A-\lambda I)^2 \subsetneq \ker(A-\lambda I)^3 \subsetneq \ldots \subsetneq \ker(A-\lambda I)^r.$$

Cette suite s'arrête pour $r \geq 1$ tel que $\dim\ker(A-\lambda I)^r$ est égale à la multiplicité de la valeur propre λ dans le polynôme caractéristique.

On dispose alors de deux renseignements importants :

r est la "taille" du bloc de Jordan associé à la valeur propre λ le plus grand.

$p = \dim\ker(A-\lambda I)$ est le nombre de blocs de Jordan associés à la valeur propre λ figurant dans la décomposition finale.

- On construit une base associée à la décomposition de Jordan de la façon suivante :

i) On examine la différence :

$$n_1 = \dim\ker(A-\lambda I)^r - \dim\ker(A-\lambda I)^{r-1}.$$

ii) On choisit n_1 vecteurs dans l'ensemble :

$$\ker(A-\lambda I)^r \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-1}.$$

On note ces vecteurs $\{w, w', w'', \ldots\}$

iii) Pour chacun de ces vecteurs, on construit la suite des itérés :

$$\begin{cases} v_r = w & v'_r = w' & v''_r = w'' \\ v_{r-1} = (A-\lambda I)w & v'_{r-1} = (A-\lambda I)w & v''_{r-1} = (A-\lambda I)w'' \\ v_{r-2} = (A-\lambda I)^2 w & v'_{r-2} = (A-\lambda I)^2 w & v''_{r-2} = (A-\lambda I)^2 w'' \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 = (A-\lambda I)^{r-1} w. & v'_1 = (A-\lambda I)^{r-1} w. & v''_1 = (A-\lambda I)^{r-1} w''. \end{cases}$$

Chacunes des familles libres $\{v_1, \ldots, v_r\}$, $\{v'_1, \ldots, v'_r\}$, $\{v''_1, \ldots, v''_r\}, \ldots$ fournit chacune un bloc de Jordan associés à la valeur propre λ, de "taille" r. En effet :

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_{r-1} & Av_r \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & (0) \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ (0) & & & & \lambda \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{r-1} \\ v_r \end{matrix} \end{array} ; \quad \begin{array}{cc} \begin{matrix} Av'_1 & Av'_2 & \cdots & Av'_{r-1} & Av'_r \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & (0) \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ (0) & & & & \lambda \end{pmatrix} & \begin{matrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_{r-1} \\ v'_r \end{matrix} \end{array} ; \ldots$$

- On recommence les étapes i), ii), iii) avec chaque différence:

$$\begin{cases} n_2 = \dim\ker(A-\lambda I)^{r-1} - \dim\ker(A-\lambda I)^{r-2}, \\ n_3 = \dim\ker(A-\lambda I)^{r-2} - \dim\ker(A-\lambda I)^{r-3}, \\ \vdots \\ n_{r-1} = \dim\ker(A-\lambda I)^{2} - \dim\ker(A-\lambda I), \\ n_r = \dim\ker(A-\lambda I) - 0, \end{cases}$$

en remarquant que iii) a déjà donné des vecteurs dans chacun des espaces considérés ci-dessus. En effet:

$$\{v_{r-1}, v'_{r-1}, v''_{r-1}, \dots\} \in \ker(A-\lambda I)^{r-1} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-2},$$
$$\{v_{r-2}, v'_{r-2}, v''_{r-2}, \dots\} \in \ker(A-\lambda I)^{r-2} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-3},$$
etc...

On sera donc obligé de compléter les familles libres suivantes:

$$\{v_{r-1}, v'_{r-1}, v''_{r-1}, \dots\},\ \{v_{r-2}, v'_{r-2}, v''_{r-2}, \dots\}, \dots$$

par des vecteurs appartenant respectivement à:

$$\ker(A-\lambda I)^{r-1} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-2},\ \ker(A-\lambda I)^{r-2} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-3}, \dots$$

de façon à avoir à nouveau des familles libres de:

$$\ker(A-\lambda I)^{r-1} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-2},\ \ker(A-\lambda I)^{r-2} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-3}, \dots$$

Si on note $w_1, w'_1, w''_1, \dots$ ces vecteurs, alors leurs itérés:

$$\mathcal{B}_1 = \{w_1, (A-\lambda I)w_1, (A-\lambda I)^2 w_1, \dots\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w'_1, (A-\lambda I)w'_1, (A-\lambda I)^2 w'_1, \dots\}$$
$$\mathcal{B}_3 = \{w''_1, (A-\lambda I)w''_1, (A-\lambda I)^2 w''_1, \dots\}$$
$$\dots$$

fournissent chacuns un bloc de Jordan associé à la valeur propre λ.

- On en déduit la réduite de Jordan de A: C'est la matrice de A dans la base:

$$\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_r\} \cup \{v'_1, \dots, v'_r\} \cup \{v''_1, \dots, v''_r\} \cup \dots \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \dots$$

b) Exponentielle d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n et t un réel. On définit une nouvelle matrice notée e^{tA} par :

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

En particulier, lorsque $t = 1$, la matrice e^A s'appelle exponentielle de la matrice A.

1) Calcul de e^{tA} pour des matrices A particulières

- S'il existe une matrice P inversible et une matrice quelconque J telles que la matrice A se décompose de la manière suivante :

$$A = P^{-1} J P,$$

alors :

$$e^{tA} = P^{-1} e^{tJ} P.$$

- Si A est une matrice diagonale telle que $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

- Si A est une matrice diagonale par blocs, c'est-à-dire telle que :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & (0) \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & A_p \end{pmatrix},$$

alors :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & & & (0) \\ & e^{tA_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e^{tA_p} \end{pmatrix}.$$

- Si A est une matrice de Jordan d'ordre n telle que $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, alors :

$$e^{tA}=\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda}\\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & e^{t\lambda} & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda}\\ \vdots & & \ddots & \ddots & te^{t\lambda}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{t\lambda}\end{pmatrix}.$$

2) Application de la notion d'exponentielle de matrices à la résolution d'équations différentielles

Le système différentiel linéaire suivant, d'inconnues $Z : t \mapsto Z(t)$:

$$\begin{cases}\dfrac{dZ}{dt}=AZ\\ Z(0)=Z_0,\end{cases}$$

où $Z_0 \in \mathbb{R}^n$ est donné,

admet pour unique solution :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Z(t)=e^{tA}Z_0.$$

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

Déterminer une réduite de Jordan de chacunes des matrices suivantes :

$$A_1=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Pour chacunes des matrices B_i suivantes, calculer e^{tB_i} :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ;$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; B_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Résolution d'un système différentiel

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

2) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

3) Déterminer une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.

4) Résoudre le système différentiel : $\dfrac{dX}{dt}(t) = AX(t)$.

5) Préciser la solution vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Exercice 4 Résolution de l'équation différentielle $y''' - y'' - y' + y = 0$

On pose :

$$Z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

1) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\frac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.
2) Calculer le polynôme caractéristique de A.
3) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
4) Déterminer une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.
5) Résoudre le système différentiel: $\frac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.
6) En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle:
$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$
7) Préciser celle vérifiant le problème de Cauchy:
$$\begin{cases} y''' - y'' - y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 5 Résolution de l'équation différentielle $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

On pose:
$$Z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

1) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\frac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.
2) Calculer le polynôme caractéristique de A.
3) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
4) Déterminer une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.
5) Résoudre le système différentiel: $\frac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.
6) En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle:
$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$
7) Préciser celle vérifiant le problème de Cauchy:
$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \\ y''(0) = 2. \end{cases}$$

3. Corrigés des exercices

Exercice 1

a) Étude de la matrice A_1

- Calculons d'abord le polynôme caratéristique de A_1 :

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 3 \\ 3-\lambda & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_3$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1-\lambda & 3 \\ 5-\lambda & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(3-\lambda)\begin{vmatrix} 4 & 1-\lambda \\ 5-\lambda & -1 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$$

$$= -(3-\lambda)\begin{vmatrix} 6-2\lambda & 1-\lambda \\ 3-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(3-\lambda)^2\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3.$$

Posons $M = A_1 - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut voir que $rg(M) = 2$ et donc que $\dim \ker M = 1$.

Calculons:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

et :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La réduite de Jordan de A_1 comporte donc un seul bloc de taille 3.

- Construisons une base associée à cette réduction.

  Prenons

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(M^3) \setminus \ker(M^2)$$

puis

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

enfin

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons P la matrice de passage définie :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}A_1P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J.$$

b) Étude de la matrice A_2

- Calculons d'abord le polynôme caratéristique de A_2 :

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -3+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3.$$

Posons $M = A_2 - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut voir que $\dim \ker M = 2$.

Calculons :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La réduite de Jordan de A comporte donc deux blocs dont le plus grand a forcément pour taille 2.

- Construisons une base associée à cette réduction :

Prenons

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(M^2) \setminus \ker(M)$$

puis

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

enfin, pour v_1, on choisit un vecteur propre de A_2 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons P la matrice de passage définie :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = J.$$

c) **Étude de la matrice A_3**

- **Calculons** d'abord le polynôme caratéristique de A_3 :

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -3 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -3 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}, \; L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)^2.
\end{aligned}$$

- Étude de la valeur propre 2

  Soit $(x,y,z) \in \ker(A_3 - 2I)$. Alors :

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -x + z = 0, \end{cases}$$

  c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = z \\ y = z\,,\ z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

  Une base de $\ker(A_3 - 2I)$ est donc :

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Étude de la valeur propre 3

  Posons $M = A_3 - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  On peut voir que $rg(M) = 2$ et donc que $\dim \ker M = 1$.

  Calculons :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  La réduite de Jordan de A comporte donc un seul bloc qui a pour taille 2.

  Construisons une base associée à cette réduction :

  Prenons

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(M^2) \setminus \ker(M)$$

puis

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons P la matrice de passage définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{2} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = J.$$

Exercice 2

- Exponentielle de B_1 :

  On a :

$$e^{tB_1} = \begin{pmatrix} \boxed{e^t} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{e^{2t}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{e^{3t}} \end{pmatrix}.$$

- Exponentielle de B_2 :

  On a :

$$e^{tB_2} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{t^2}{2}e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

- Exponentielle de B_3 :

On a:

$$e^{tB_3} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{3t}} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

- Exponentielle de B_4 :

On a:

$$e^{tB_4} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{matrix}} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

- Exponentielle de B_5 :

On a:

$$e^{tB_5} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{matrix}} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

- Exponentielle de B_6 :

On a:

$$e^{tB_6} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{matrix}} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1) Calcul du polynôme caratéristique de A :

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 2-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_3$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda-3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ \lambda-3 & 1 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

2) On a :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit clairement que $\dim\ker(A-2I) = 1 \neq 3$. Ainsi, la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est différent de la multiplicité de cette même valeur propre 2 dans le polynôme caratéristique. On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

3) Posons $M = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a clairement $rg(M^2) = 1$ donc $\dim \ker(M^2) = 2$.

Enfin, $M^3 = 0$, donc $\dim \ker(M^3) = 3$.

Comme $\dim \ker(M) = 1$ et $\dim \ker(M^3) = 3$, alors la réduite de Jordan de A comporte donc un bloc de taille 3.

Construisons une base associée à cette réduction.

Prenons

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(M^3) \setminus \ker(M^2)$$

puis

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

enfin

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons P la matrice de passage définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}\right) = J.$$

Calculons e^{tA} :

Vu que :

$$A = PJP^{-1},$$

on a :

$$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

De plus,

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \dfrac{t^2e^{2t}}{2} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} - \dfrac{t^2e^{2t}}{2} & \dfrac{t^2e^{2t}}{2} & te^{2t} + \dfrac{t^2e^{2t}}{2} \\ te^{2t} - \dfrac{t^2e^{2t}}{2} & e^{2t} - te^{2t} + \dfrac{t^2e^{2t}}{2} & \dfrac{t^2e^{2t}}{2} \\ -te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix}.$$

4) Résolution du système différentiel

La solution est donnée par :

$$X(t) = e^{tA}U_0,$$

où U_0 est la condition initiale.

5) On calcule

$$X(t) = e^{tA}U_0 = \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} + \dfrac{t^2e^{2t}}{2} \\ e^{2t} + \dfrac{t^2e^{2t}}{2} \\ e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1) On a facilement :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Calcul du polynôme caratéristique de A :

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+\lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(1-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(1-\lambda)^2(1+\lambda).
\end{aligned}$$

3) On a :

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit clairement que $\dim \ker(A - I) = 1 \neq 2$. Ainsi, la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est différent de la multiplicité de cette même valeur propre 1 dans le polynôme caratéristique. On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

4) Posons $M = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a clairement $rg(M^2) = 1$ donc $\dim \ker(M^2) = 2$.

Comme $\dim \ker(M) = 1$ et $\dim \ker(M^2) = 2$, alors la réduite de Jordan de A comporte donc un seul bloc de taille 2 correspondant à la valeur propre 1.

Construisons une base associée à cette réduction :

Prenons

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(M^2) \setminus \ker(M)$$

puis

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Posons $M = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a clairement $rg(M) = 2$, donc $\dim \ker M = 1$.

Prenons un vecteur de $\ker M$, par exemple: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A+I)$.

Posons P la matrice de passage définie:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On a:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & (0) \\ (0) & \boxed{-1} \end{pmatrix} = J.$$

5) Calculons e^{tA} .

Vu que:

$$A = PJP^{-1},$$

on a:

$$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

De plus,

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$e^{tA}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^t-\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}te^t-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^t-\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^t+\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{-1}{4}e^t-\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{3}{4}e^t+\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{4}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

6) On trouve :

$$y(t)=A\left(\frac{3}{4}e^t-\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{4}e^{-t}\right)+B\left(\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}\right)+C\left(\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}\right),$$

c'est-à-dire :

$$y(t)=\left(\frac{3}{4}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}C\right)e^t+\left(-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C\right)te^t+\left(\frac{1}{4}A-\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}C\right)e^{-t}.$$

7) La solution est donnée par :

$$Z(t)=e^{tA}U_0,$$

où U_0 est le vecteur :

$$U_0=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$Z(t)=\begin{pmatrix}y(t)\\y'(t)\\y''(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t-te^t+e^{-t}\\-te^t-e^{-t}\\-e^t-te^t+e^{-t}\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$y(t)=e^t-te^t+e^{-t}.$$

Exercice 5

1) On a facilement :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{pmatrix}.$$

2) Calcul du polynôme caratéristique de A:

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 1 & -3 & 3-\lambda\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 1 & -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1-\lambda & -\lambda & 1\\ 1-\lambda & -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1+\lambda & -\lambda & 1\\ 4 & -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda)\begin{vmatrix}1+\lambda & 1\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

3) On a:

$$A - I = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}.$$

On voit clairement que $\dim\ker(A-I) = 1 \neq 3$. Ainsi, la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est différent de la multiplicité de cette même valeur propre 1 dans le polynôme caratéristique. On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

4) Posons $M = A - I = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

Calculons:

$$M^2 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

puis :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\dim \ker(M) = 1$ et $\dim \ker(M^3) = 3$, alors la réduite de Jordan de A comporte donc un seul bloc de taille 3 correspondant à l'unique valeur propre 1.

Construisons une base associée à cette réduction.

Prenons

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(M^3) \setminus \ker(M^2)$$

puis

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

enfin :

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posons P la matrice de passage définie :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = J.$$

5) Calculons e^{tA}.

Vu que :

$$A = PJP^{-1},$$

on a :

$$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

De plus,

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t - te^t + \frac{1}{2}t^2e^t & te^t - t^2e^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ \frac{1}{2}t^2e^t & e^t - te^t + t^2e^t & te^t + \frac{1}{2}t^2e^t \\ te^t + \frac{1}{2}t^2e^t & -3te^t - t^2e^t & e^t + 2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t \end{pmatrix}.$$

6) On trouve :

$$y(t) = A\left(e^t - te^t + \frac{1}{2}t^2e^t\right) + B\left(te^t - t^2e^t\right) + C\left(\frac{1}{2}t^2e^t\right),$$

c'est-à-dire :

$$y(t) = Ae^t + (-A + B)te^t + \left(-B + \frac{1}{2}C\right)t^2e^t.$$

7) La solution est donnée par :

$$Z(t) = e^{tA}U_0,$$

où U_0 est le vecteur :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$Z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t + te^t - t^2e^t \\ 3e^t - te^t - t^2e^t \\ 2e^t - 3te^t - t^2e^t \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$y(t) = 2e^t + te^t - t^2e^t.$$

Chapitre 3

Polynômes d'endomorphismes

1. Rappels de cours

Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel E de dimension finie.

a) Polynôme d'endomorphisme

▸ Définition

Soit P un polynôme. On note :

$$P(X) = a_n X^n + \ldots + a_k X^k + \ldots + a_1 X + a_0.$$

On définit un nouvel endomorphisme noté $P(u)$ par :

$$P(u) = a_n u^n + \ldots + a_k u^k + \ldots + a_1 u + a_0 Id_E,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ P(u)(x) = a_n u^n(x) + \ldots + a_k u^k(x) + \ldots + a_1 u(x) + a_0 x,$$

où u^k désigne $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

▸ Propriété 1

Soit P et Q deux polynômes, alors, pour tout endomorphisme f, on a :

$$P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

b) Polynôme annulateur et polynôme minimal

▶ Définitions

- Un polynôme P est dit **annulateur** de u si seulement si $P(u)$ est l'endomorphisme nul, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, P(u)(x) = 0_E.$$

- On appelle polynôme **minimal** de u, que l'on note m_u, le polynôme annulateur de u, de plus petit degré et dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1. Ce polynôme existe bien grâce au théorème de Cayley-Hamilton, cité ci-après.

▶ Propriétés

- Théorème (théorème de Cayley-Hamilton)

  1e variante: le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

  2e variante: le polynôme caractéristique de u est un multiple du polynôme minimal de u.

  3e variante: le polynôme minimal de u divise le polynôme caractéristique de u ainsi que tous les polynômes annulateurs de u.

- Soit $\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ le spectre de u.

  Le polynôme minimal m_u est de la forme :

$$m_u(X) = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}(X-\lambda_2)^{\alpha_2} \times \cdots \times (X-\lambda_p)^{\alpha_p},$$

  où, pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, $\alpha_i \geq 1$ représente la "taille" du bloc de Jordan le plus grand correspondant à la valeur propre λ_i dans la décomposition de Jordan.

  De plus, le polynôme caractéristique de u est de la forme :

$$P_u(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\beta_1}(X-\lambda_2)^{\beta_2} \times \cdots \times (X-\lambda_p)^{\beta_p},$$

  où, pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, $\alpha_i \leq \beta_i$.

- Un polynôme P est annulateur de u si et seulement si P est un multiple de m_u, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un polynôme S tel que $P = S \times m_u$.

- Théorème

  Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal m_u est scindé et ses racines sont simples.

- Lemme des noyaux :

Soient $P_1, P_2, \dots, P_m$ des polynômes premiers deux à deux. On note :

$$P = \prod_{i=1}^{m} P_i.$$

On suppose que :

$$P(u) = 0.$$

Alors :

$$E = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus \ldots \oplus \ker P_m(u).$$

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

Étant donnés a, b, c trois éléments distincts de $\mathbb{C}$, déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } A_4 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{e) } A_5 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{f) } A_6 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les puissances de $A - I_3$.

2) Donner $m_A(X)$.

3) Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Après avoir justifié l'existence de l'inverse A^{-1}, calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal des matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} ; B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

En déduire A^{-1} et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

1) On suppose que $P(X)=(X-1)(X+1)^2(X-3)^3$ est un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$. Que peut-on dire des polynômes caractéristique et minimal de A?

2) On considère deux polynômes annulateurs pour une matrice donnée $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$P_1(X)=(X-1)^3(X+2)(X-2)^2(X-5),$$
$$P_2(X)=(X-1)(X+1)(X+2)^4(X-5)^2.$$

Préciser toutes les expressions possibles du polynôme minimal ainsi que du polynôme caractéristique de A. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

Exercice 5

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2=4f$. Quelles sont tous les polynômes pouvant être polynôme minimal de f.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et g un endomorphisme diagonalisable de E. On suppose qu'il existe un entier m supérieur ou égal à 3 tel que: $g^m = Id_E$.

Démontrer l'égalité $g^2 = Id_E$.

Exercice 6

Soient A et B deux matrices 5×5 dont le polynôme caractéristique est

$$P_A(X)=P_B(X)=-X^5.$$

1) Sont-elles semblables? Justifier votre réponse.

2) On suppose que $m_A(X) = m_B(X) = X^p, 1 \leq p \leq 5$. Pour chaque valeur de p, dire, en argumentant, si elles sont semblables ou non. Donner les formes de Jordan associées.

Exercice 7

Soit g un endomorphisme diagonalisable du $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie E. On suppose qu'il existe m, $m \geq 2$ tel que $g^{m+1} = g^m$.

Montrer qu'un tel endomorphisme est un projecteur, c'est-à-dire qu'il vérifie $g^2 = g$.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie. On considère un endomorphisme f vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} i)\ f^3 - 3f^2 + 2f = 0, \\ ii)\ f^8 + 16f^4 = 0. \end{cases}$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 9

Déterminer suivant la valeur du paramètre m le polynôme minimal de la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2m-5 & 1 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 5-m & -1 & m-1 & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 2 & 8-m \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Soient E un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

1) On suppose que f est diagonalisable. Montrer que, quelque soit m, f^m est diagonalisable.

2) On suppose $n \geq 2$. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = \ldots = f(e_{m-1}) = 0 \text{ et } f(e_m) = e_1.$$

Vérifier que f^2 est diagonalisable. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? inversible ?

3) On suppose que f est inversible et qu'il existe $k \geq 2$ tel que f^k soit diagonalisable.

a) Montrer que f^k est inversible. En déduire que $m_{f^k}(0) \neq 0$.

b) On considère $Q(X) = m_{f^k}(X^k)$. Montrer que que les racines de $Q(X)$ sont simples.

c) Montrer que $m_f(X)$ divise $Q(X)$. En déduire que f est diagonalisable.

4) Exemple: E est de dimension 4 et:

$$f(e_1) = e_4, f(e_2) = 3e_3, f(e_3) = 3e_2, f(e_4) = 9e_1.$$

Calculer f^2. Montrer que f est diagonalisable. Détermine son polynôme minimal.

Exercice 11

Soit n un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), u un endomorphisme de E, $m_u(X)$ son polynôme minimal et $P_u(X)$ son polynôme caractéristique.

Partie A

Montrer que, s'il existe $a \in E$ tel que $E = vect\left\{a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\right\}$, alors:

$$m_u(X) = (-1)^n P_u(X).$$

Partie B

Le but de cette partie est d'établir la réciproque du résultat de la partie A.

1) Soit x un élément non nul de E et $F_x = vect\left\{x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)\right\}$, où $k = \deg m_u(X)$.

a) Montrer que F_x est un sous-espace vectoriel stable par u.

b) Soit u_x l'endomorphisme de F_x défini par la restriction de u à F_x. Montrer que le polynôme minimal de u_x, noté $m_{u_x}(X)$, divise le polynôme $m_u(X)$.

2) Soit $R(X)$ un diviseur irréductible et unitaire de $m_u(X)$ et $R^s(X)$ la plus grande puissance de $R(X)$ qui divise $m_u(X)$.

a) Montrer que $\ker\left(R^{s-1}(u)\right) \subset \ker\left(R^s(u)\right)$ et $\ker\left(R^{s-1}(u)\right) \neq \ker\left(R^s(u)\right)$.

b) Soit $x \in \ker\left(R^s(u)\right) \setminus \ker\left(R^{s-1}(u)\right)$. On considère, comme dans la question 1, le sous-espace F_x et u_x l'endomorphisme de F_x. Montrer que $m_{u_x}(X) = R^s(X)$.

3) On note $m_u(X) = \prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i}(X)$ la décomposition en facteurs premiers de $m_u(X)$, où les nombres n_i sont des entiers naturels non nuls et $P_i(X)$ des polynômes irréductibles et unitaires. En appliquant la question 2, on considère, pour chaque polynôme $P_i(X)$ un élément non nul $x_i \in \ker\left(P_i^{n_i}(u)\right)$ tel que $m_{u_{x_i}}(X) = P_i^{n_i}(X)$, et on note $a = x_1 + \ldots + x_r$.

a) Vérifier que a est non nul. Soit $Q(X)$ un polynôme tel que $Q(u)(a) = 0_E$. Montrer que, pour tout i, $Q(u)(x_i) = 0_E$. En déduire que le polynôme $P_i^{n_i}(X)$ divise $Q(X)$.

b) Déduire de 3 $a)$ et de 1 $b)$ que $m_{u_a}(X) = m_u(X)$.

c) Montrer que $\mathcal{B}_a = \{a, u(a), \ldots, u^{k-1}(a)\}$ est une base de F_a.

4) Établir la réciproque du résultat de la partie **A**.

Partie C

Dans cette partie, nous donnons une version matricielle du résultat obtenu dans les parties **A** et **B**.

Soit n un entier naturel non nul et A une matrice. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $m_A(X) = (-1)^n P_A(X)$.

ii) La matrice A est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 12

On se place dans $E = \mathbb{C}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

On désigne par j l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est la matrice suivante:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer l'image des vecteurs de $\mathcal{B}$ par j, j^2, j^3, et j^4.

2) En déduire J^2, J^3 et J^4.

3) Déterminer un polynôme annulateur non nul de J.

4) Montrer que, si $P \in \mathbb{C}X$ avec $\deg(P) \leq 3$ et $P(J) = 0$, alors $P = 0$.

5) En déduire le polynôme minimal de J.

6) Montrer que J est diagonalisable.

7) Déterminer les valeurs propres de J.

3. Corrigés des exercices

Exercice 1

a) Calcul du polynôme minimal de A_1

Le polynôme caractéristique de A_1 est :

$$P_{A_1}(X) = (X-a)(X-b)(X-c).$$

Comme le polynôme minimal de A_1 divise P_{A_1} et a les mêmes racines que P_{A_1}, alors :

$$m_{A_1}(X) = (X-a)(X-b)(X-c) = P_{A_1}(X).$$

b) Calcul du polynôme minimal de A_2 :

Le polynôme caractéristique de A_2 est :

$$P_{A_2}(X) = (X-a)(X-b)^2.$$

Comme le polynôme minimal de A_2 divise P_{A_2} et a les mêmes racines que P_{A_2}, alors :

$$m_{A_2}(X) = (X-a)(X-b) \text{ ou } m_{A_2}(X) = (X-a)(X-b)^2.$$

Par un simple calcul matriciel, on montre que :

$$(A_2 - aI)\times(A_2 - bI) = 0,$$

donc, par définition du polynôme minimal, on a :

$$m_{A_2}(X) = (X-a)(X-b).$$

c) Calcul du polynôme minimal de A_3 :

Le polynôme caractéristique de A_3 est :

$$P_{A_3}(X) = (X-a)(X-b)^2.$$

Comme le polynôme minimal de A_3 divise P_{A_3} et a les mêmes racines que P_{A_3}, alors :

$$m_{A_3}(X) = (X-a)(X-b) \text{ ou } m_{A_3}(X) = (X-a)(X-b)^2.$$

Par un simple calcul matriciel, on montre que :

$$(A_3 - aI)\times(A_3 - bI) \neq 0 \text{ et } (A_3 - aI)\times(A_3 - bI)^2 = 0,$$

donc, par définition du polynôme minimal, on a :

$$m_{A_2}(X) = (X-a)(X-b)^2.$$

d) Calcul du polynôme minimal de A_4 :

Le polynôme caractéristique de A_4 est :

$$P_{A_4}(X) = (X-a)^3.$$

Comme le polynôme minimal de A_4 divise P_{A_4} et a les mêmes racines que P_{A_4}, alors :

$$m_{A_4}(X) = (X-a).$$

e) Calcul du polynôme minimal de A_5 :

Le polynôme caractéristique de A_5 est :

$$P_{A_5}(X) = (X-a)^3.$$

Comme le polynôme minimal de A_5 divise P_{A_5} et a les mêmes racines que P_{A_5}, alors :

$$m_{A_5}(X) = (X-a) \text{ ou } m_{A_5}(X) = (X-a)^2 \text{ ou } m_{A_5}(X) = (X-a)^3.$$

Par un simple calcul matriciel, on montre que :

$$(A_5 - aI) \neq 0 \,;\; (A_5 - aI)^2 \neq 0 \,; (A_5 - aI)^3 = 0,$$

donc, par définition du polynôme minimal, on a :

$$m_{A_5}(X) = (X-a)^3.$$

f) Calcul du polynôme minimal de A_6 :

Le polynôme caractéristique de A_6 est :

$$P_{A_6}(X) = (X-a)^3.$$

Comme le polynôme minimal de A_6 divise P_{A_6} et a les mêmes racines que P_{A_6}, alors :

$$m_{A_6}(X) = (X-a) \text{ ou } m_{A_6}(X) = (X-a)^2 \text{ ou } m_{A_6}(X) = (X-a)^3.$$

Par un simple calcul matriciel, on montre que :

$$(A_6 - aI) \neq 0 \,; (A_6 - aI)^2 = 0 \,; (A_6 - aI)^3 = 0,$$

donc, par définition du polynôme minimal, on a :

$$m_{A_6}(X) = (X-a)^2.$$

Exercice 2

1) Par calculs, on trouve successivement :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

et :

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Le polynôme P défini par :

$$P(X) = (X-1)^2$$

est un polynôme annulateur de A.

On sait que le polynôme minimal m_A divise P, donc :

$$m_A(X) = X - 1 \text{ ou } m_A(X) = (X-1)^2.$$

Comme $A - I_3 \neq 0$, alors forcement $m_A(X) = (X-1)^2$.

3) Considérons la division euclidienne de X^n par $m_A(X)$:

$$X^n = m_A(X)B(X) + R(X),$$

où R est de la forme $R(X) = \alpha X + \beta$.

On a donc:

$$X^n = (X-1)^2 B(X) + \alpha X + \beta \qquad (*)$$

Prenons maintenant $X = 1$ dans (*):

$$1 = \alpha + \beta.$$

Dérivons (*) puis prenons $X = 1$:

$$n = \alpha.$$

On en déduit que:

$$\begin{cases} \alpha = n \\ \beta = -n + 1. \end{cases}$$

Ainsi:

$$X^n = (X-1)^2 B(X) + nX - n + 1,$$

c'est-à-dire :

$$A^n = nA-(n-1)I_3,$$

ou encore :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & -n+1 & n \\ n & n & -n+1 \end{pmatrix}.$$

4) On sait que $(A-I_3)^2 = 0$, c'est-à-dire :

$$A^2 - 2A + I_3 = 0.$$

Cette dernière relation s'écrit :

$$A(A-2I_3) = -I_3,$$

soit :

$$A(2I_3 - A) = I_3.$$

La matrice A est donc inversible et son inverse est donnée par :

$$A^{-1} = 2I_3 - A.$$

Démontrons par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$A^{-n} = (n+1)I_3 - nA.$$

Pour $n=1$ la propriété vient d'être vérifiée.

Supposons la propriété vérifiée pour n et démontrons-la pour $n+1$:

On a :

$$\begin{aligned} A^{-(n+1)} &= A^{-n}A^{-1} \\ &= [(n+1)I_3 - nA][2I_3 - A] \\ &= 2(n+1)I_3 - (n+1)A - 2nA + nA^2 \\ &= 2(n+1)I_3 - (3n+1)A + nA^2. \end{aligned}$$

On sait que :

$$A^2 - 2A + I_3 = 0,$$

donc :

$$\begin{aligned} A^{-(n+1)} &= 2(n+1)I_3 - (3n+1)A + nA^2 \\ &= 2(n+1)I_3 - (3n+1)A + n(2A - I_3) \\ &= 2(n+1)I_3 - (3n+1)A + 2nA - nI_3 \\ &= (n+2)I_3 - (n+1)A. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^{-n} = (n+1)I_3 - nA.$$

Exercice 3

a) Étude de A :

- Déterminons le polynôme caractéristique de A :

  On a :

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

  Le polynôme caractéristique de A est donc $P_A(X) = (X-2)^3$.

  Le polynôme minimal de A est donc un diviseur de P_A :

$$m_A(X) = X-2 \text{ ou } m_A(X) = (X-2)^2 \text{ ou } m_A(X) = (X-2)^3.$$

  En calculant $(A-2I)$ puis $(A-2I)^2$, on obtient :

  $m_A(X) = (X-2)^2 = X^2 - 4X + 4.$

- Calcul de A^{-1} :

  On sait que $m_A(A) = 0$, donc :

$$A^2 - 4A + 4I = 0,$$

  c'est-à-dire :

$$A(A-4I) = -4I,$$

  ou encore :

$$A\left(\frac{-1}{4}A + I\right) = I.$$

La matrice A est bien inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{-1}{4}A + I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

- Calcul de A^n :

Effectuons la division euclidienne de X^n par m_A :

On a :

$$X^n = m_A(X)Q(X) + R(X) \text{ avec } \deg R < 2.$$

Puisque $\deg R < 2$, on recherche deux réels α et β tels que : $R(X) = \alpha X + \beta$, c'est-à-dire tels que :

$$X^n = m_A(X)Q(X) + \alpha X + \beta. \quad (*)$$

Prenons $X = 2$:

$$2^n = 0 + 2\alpha + \beta.$$

Dérivons (*) :

$$nX^{n-1} = m_A'(X)Q(X) + m_A(X)Q'(X) + \alpha.$$

Prenons $X = 2$, tout en sachant que $m_A'(2) = m_A(2) = 0$, (car 2 est racine double de m_A) :

$$n2^{n-1} = 0 + \alpha.$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \alpha = n2^{n-1} \\ \beta = -2^n(n-1) \end{cases}.$$

Puisque $m_A(A) = 0$, on en déduit que :

$$A^n = n2^{n-1}A - 2^n(n-1)I.,$$

c'est-à-dire :

$$A^n = \begin{pmatrix} n2^{n-1} + 2^n & n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & n2^{n-1} & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}.$$

b) Étude de B

- Déterminons le polynôme caractéristique de B.

  On calcule :

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}4-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 4-\lambda & 1-\lambda & 1 & 1\\ 4-\lambda & 1 & 1-\lambda & 1\\ 4-\lambda & 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ \lambda & 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -(4-\lambda)\lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -(4-\lambda)\lambda\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ \lambda & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\lambda^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -(4-\lambda)\lambda^3 = (\lambda-4)\lambda^3.$$

  Le polynôme caractéristique de B est donc : $P_B(X) = X^3\,(X-4)$.

- Déterminons le polynôme minimal m_B de B.

  Comme m_B divise P_B et que ces deux polynômes ont les mêmes racines (sans compter la multiplicité), on en déduit que :
  $m_B(X) = X(X-4)$ ou $m_B(X) = X^2\,(X-4)$ ou $m_B(X) = X^3\,(X-4)$.

  En calculant $A(A+4I)$, on en déduit que : $m_B(X) = X\,(X-4)$.

Exercice 4

1) Déterminons les polynômes caractéristiques possibles pour A.

Le polynôme caractéristique de A, noté P_A, est de degré 3 et divise P. Le polynôme P_A est donc l'un des polynômes suivants :

$$P_A(X) = (X-1)(X+1)^2$$
$$P_A(X) = (X-1)(X+1)(X-3)$$
$$P_A(X) = (X-1)(X-3)^2$$
$$P_A(X) = (X+1)^2(X-3)$$
$$P_A(X) = (X+1)(X-3)^2$$
$$P_A(X) = (X-3)^3.$$

Déterminons les polynômes minimaux possibles pour A :

Le polynômes minimal de A divise P_A et a les mêmes racines que P_A (sans compter la multiplicité).

Si $P_A(X) = (X-1)(X+1)^2$, alors le polynôme minimal de A est l'un des polynômes suivants :

$$m_A(X) = (X-1)(X+1)^2$$
$$m_A(X) = (X-1)(X+1).$$

Si $P_A(X) = (X-1)(X+1)(X-3)$, alors le polynôme minimal de A est :

$$m_A(X) = (X-1)(X+1)(X-3).$$

Si $P_A(X) = (X-1)(X-3)^2$, alors le polynôme minimal de A est l'un des polynômes suivants :

$$m_A(X) = (X-1)(X-3)^2$$
$$m_A(X) = (X-1)(X-3).$$

Si $P_A(X) = (X+1)^2(X-3)$, alors le polynôme minimal de A est l'un des polynômes suivants :

$$m_A(X) = (X+1)^2(X-3)$$
$$m_A(X) = (X+1)(X-3).$$

Si $P_A(X) = (X+1)(X-3)^2$, alors le polynôme minimal de A est l'un des polynômes suivants :

$$m_A(X) = (X+1)(X-3)^2$$
$$m_A(X) = (X+1)(X-3).$$

Si $P_A(X) = (X-3)^3$, alors le polynôme minimal de A est l'un des polynômes suivants:

$$m_A(X) = (X-3)^3$$

$$m_A(X) = (X-3)^2$$

$$m_A(X) = (X-3).$$

2) Le polynôme caractéristique de A divise P_1 et P_2, donc il divise $PGCD(P_1,P_2)$.

Or :

$$PGCD(P_1,P_2) = (X-1)(X+2)(X-5),$$

donc, le polynôme caractéristique de A est:

$$P_A(X) = (X-1)(X+2)(X-5),$$

et son polynôme minimal est :

$$m_A(X) = (X-1)(X+2)(X-5).$$

Le polynôme minimal est scindé et ses racines sont simples donc A est diagonalisable.

Exercice 5

1) Le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^2 - 4X = X(X-4)$$

est un polynôme annulateur de f.

Comme le polynôme minimal de f divise P, alors le polynôme minimal de f est l'un des polynômes suivants :

$$\left|\begin{array}{l} m_f(X) = X(X-4) \\ m_f(X) = X \\ m_f(X) = X-4. \end{array}\right.$$

2) Comme $g^m = Id$, alors le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^m - 1$$

est un polynôme annulateur de g.

On peut écrire :

$$\begin{cases} P(X) = (X-1)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)\ldots\left(X - e^{\frac{2(m-1)i\pi}{m}}\right), \text{ si } m \text{ est impair} \\ P(X) = (X-1)(X+1)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)\ldots\left(X - e^{\frac{2(m-1)i\pi}{m}}\right), \text{ si } m \text{ est pair} \end{cases}$$

- 1er cas : m est impair.

  Le polynôme P admet une seule racine réelle 1.

  Le polynôme minimal de g, noté m_g divise P et est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. De plus, l'endomorphisme g est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, m_g est donc scindé sur $\mathbb{R}$ et ses racines sont simples.

  On a donc :
  $$m_g(X) = X - 1.$$

  On a donc $g = Id$ et donc $g^2 = Id$.

- 2e cas : m est pair.

  De la même façon, l'endomorphisme g est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses racines sont simples.

  On a donc :
  $$m_g(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1.$$

  On a donc : $g^2 = Id$, c'est-à-dire $g^2 = Id$.

Exercice 6

1) Les deux matrices A et B ne sont pas semblables. En effet, prenons :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien :
$$P_A(X) = P_B(X) = -X^5.$$

Pourtant, s'il existait une matrice P inversible telle que :
$$PAP^{-1} = B,$$

on aurait :
$$PAP^{-1} = 0 = B,$$

ce qui est une contradiction.

2) Discutons suivant les valeurs de p.

- 1er cas : $p = 1$.

  Dans ce cas, $A = B = 0$ et les deux matrices A et B sont semblables.

- 2e cas : $p = 2$.

  Dans ce cas, pour chacune des matrices A et B, la taille du bloc de Jordan le plus grand est 2.

  On peut avoir :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & (0) & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & (0) \\ (0) & (0) & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

  Les matrices A et B ne sont pas semblables.

- 3e cas : $p = 3$.

  Dans ce cas, Pour chacune des matrices A et B, la taille du bloc de Jordan le plus grand est 3.

  On peut avoir :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & & (0) \\ & \boxed{0} & \\ (0) & & \boxed{0} \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

  Les matrices A et B ne sont pas semblables.

- 4e cas : $p = 4$.

  Dans ce cas, Pour chacune des matrices A et B, la taille du bloc de Jordan le plus grand est 4.

  Les matrices A et B sont toutes les deux semblables à :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & (0) \\ (0) & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

  Les matrices A et B sont donc semblables.

- 5e cas : $p = 5$.

Dans ce cas, Pour chacune des matrices A et B, la taille du bloc de Jordan le plus grand est 5. Il y a donc un seul bloc de Jordan de taille 5.

Les matrices A et B sont toutes les deux semblables à :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont donc semblables.

Exercice 7

On sait qu'il existe $m \geq 2$ tel que $g^{m+1} = g^m$, c'est-à-dire $g^{m+1} - g^m = 0$.

On en déduit que le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^{m+1} - X^m = X^m (X-1)$$

est un polynôme annulateur de g.

Le polynôme minimal de g, noté m_g, divisant P, on en déduit que m_g est de la forme:

$$m_g(X) = X^p (X-1) \quad \text{ou} \quad X-1 \quad \text{ou} \quad X^p,$$

où $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans tous les cas, on a :

$$Sp(g) \subset \{0,1\}.$$

Comme l'endomorphisme g est diagonalisable, on en déduit qu'il existe une base $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ formée des vecteurs propres de g dans laquelle la matrice de g est de la forme:

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

On a alors bien :

$$g^2 = g.$$

REMARQUE

Comme l'endomorphisme g est diagonalisable, le polynôme minimal de g est scindé et ses racines sont simples. Dans ce cas, le polynôme minimal de g, noté m_g, est de la forme :

$$m_g(X) = X(X-1) \text{ ou } X-1 \text{ ou } X.$$

Dans tous les cas, on a bien :

$$g^2 = g.$$

Exercice 8

On sait que

$$f^3 - 3f^2 + 2f = 0.$$

On en déduit que le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$$

est un polynôme annulateur de f.

Ainsi le polynôme minimal m_f de f divise $X(X-1)(X-2)$.

De la même façon, comme :

$$f^8 + 16f^4 = 0.$$

On en déduit que le polynôme Q défini par :

$$P(X) = X^8 + 16X^4 = X^4\left(X^4 + 16\right)$$

est un polynôme annulateur de f.

Ainsi le polynôme minimal m_f de f divise $X^4\left(X^4+16\right)$.

Comme m_f divise $X^4\left(X^4+16\right)$ et m_f divise $X(X-1)(X-2)$, on en déduit que :

$$m_f \text{ divise } PGCD\left(X^4\left(X^4+16\right), X(X-1)(X-2)\right) = X,$$

c'est-à-dire : $m_f(X) = X$.

Comme $m_f(f) = 0$, on en déduit que : $f = 0$.

Exercice 9

Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A_m :

$$\begin{aligned}
\det(A_m - \lambda I) &= (m-\lambda)\begin{vmatrix} 2m-5-\lambda & 1 & 4-m \\ 5-m & m-1-\lambda & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 8-m-\lambda \end{vmatrix} \\
& \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= (m-\lambda)\begin{vmatrix} m-\lambda & 1 & 4-m \\ m-\lambda & m-1-\lambda & m-4 \\ m-\lambda & 2 & 8-m-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(m-\lambda)^2\begin{vmatrix} 0 & \lambda-m+2 & 8-2m \\ 0 & m-3-\lambda & 2m-12+\lambda \\ 1 & 2 & 8-m-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(m-\lambda)^2\begin{vmatrix} \lambda-m+2 & 8-2m \\ m-3-\lambda & 2m-12+\lambda \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\
&= -(m-\lambda)^2\begin{vmatrix} \lambda-m+2 & 4-2\lambda \\ m-3-\lambda & -6+3\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(m-\lambda)^2(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-m+2 & -2 \\ m-3-\lambda & 3 \end{vmatrix} \\
&= -(m-\lambda)^3(\lambda-2).
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors : $m = 2$ ou $m \neq 2$.

- 1er cas : $m = 2$.

  On a alors :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

  Etudions $\ker(A_2 - 2I)$:

  On a :

$$A_2 - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $rg(A_2 - 2I) = 1$. Ainsi, $\dim\ker(A_2 - 2I) = 3$.

De plus, on a forcement que $\dim\ker(A_2 - 2I)^2 = 4$. Ainsi, la réduite de Jordan de A_2 possède trois blocs dont le plus grand est de taille 2, c'est-à-dire :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{2} & & (0) \\ & \boxed{2} & \\ (0) & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal de A_2 est donc : $m_{A_2}(X) = (X-2)^2$.

- 2e cas : $m \neq 2$.

  On a alors :

$$A_m - mI = \begin{pmatrix} m-5 & 1 & 1 & 4-m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5-m & -1 & -1 & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 2 & 8-2m \end{pmatrix}.$$

Etudions $\ker(A_m - mI)$:

On montre facilement que $rg(A_m - mI) = 1$. Ainsi, $\dim\ker(A_m - mI) = 3$.

Ainsi, pour $m \neq 2$, la matrice A_m est diagonalisable et il existe une base formée des vecteurs propres de A_m dans laquelle A_m s'écrit :

$$A'_m = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal de A_m est donc : $m_{A_m}(X) = (X-2)(X-m)$.

Exercice 10

1) Notons $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ les valeurs propres de u et $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ les vecteurs propres associés.

On a :

$$\begin{cases} f(e_1') = \lambda_1 e_1' \\ f(e_2') = \lambda_2 e_2' \\ \vdots \\ f(e_n') = \lambda_n e_n' \end{cases}$$

donc:

$$\begin{cases} f^m(e_1') = \lambda_1^m e_1' \\ f^m(e_2') = \lambda_2^m e_2' \\ \vdots \\ f^m(e_n') = \lambda_n^m e_n' \end{cases}.$$

Les vecteurs propres de f sont aussi vecteurs propres de f^m associés respectivement aux valeurs propres $\left\{\lambda_1^m, \lambda_2^m, ..., \lambda_n^m\right\}$.

Comme f est diagonalisable, $\left\{e_1', e_2', ..., e_n'\right\}$ forme une base de vecteurs propres de f^m associés respectivement aux valeurs propres $\left\{\lambda_1^m, \lambda_2^m, ..., \lambda_n^m\right\}$: f^m est donc diagonalisable.

2) La matrice de l'endomorphisme f est donnée par :

$$\mathcal{M}at(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de l'endomorphisme f^2 est donnée par :

$$\mathcal{M}at(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f^2 est donc clairement diagonalisable. Par contre f n'est ni diagonalisable, ni inversible.

3) a) On calcule :

$$\det\left(f^k\right) = (\det f)^k \neq 0,$$

car f est inversible et que donc $\det f \neq 0$.

Supposons par l'absurde que $m_{f^k}(0) = 0$. Dans ce cas, 0 serait valeur propre : ceci est impossible car f^k est inversible.

On a bien :

$$m_{f^k}(0) \neq 0.$$

b) Comme f^k est diagonalisable, le polynôme minimal de f^k est scindé et ses racines sont simples. Il s'écrit donc :

$$m_{f^k}(X) = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p) \text{ avec } \forall (i, j), \lambda_i \neq \lambda_j \text{ et } \lambda_i \neq 0.$$

Examinons les racines de Q :

Le polynôme Q s'écrit :

$$Q(X) = (X^k - \lambda_1)\dots(X^k - \lambda_p) \, avec \ \lambda_i \neq \lambda_j \ et \ \forall i, \lambda_i \neq 0.$$

Les racines de Q sont : $\{racines \ k^\circ \ de \ \lambda_1\} \cup \dots \cup \{racines \ k^\circ \ de \ \lambda_p\}$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, les racines k° de λ_i sont toutes distinctes entre elles, car $\lambda_i \neq 0$.

De plus, une racine k° de λ_i ne peut pas être racine k° de λ_j avec $i \neq j$.

Les racines de Q sont donc simples.

c) On calcule $Q(f) = m_{f^k}(f^k) = 0$.

Le polynôme Q est donc un polynôme annulateur de f.

Le polynôme minimal m_f de f divise Q. Or les racines de Q sont simples, donc les racines de m_f sont simples.

Le polynôme minimal m_f de f est scindé (On est sur $\mathbb{C}$) et ses racines sont simples, donc f est diagonalisable.

4) On calcule :

$$\begin{cases} f^2(e_1) = 3e_1 \\ f^2(e_2) = 9e_2 \\ f^2(e_3) = 9e_3 \\ f^2(e_4) = 3e_4. \end{cases}$$

L'endomorphisme f est inversible (car l'image de la base $\{e_1, \dots, e_4\}$ par f est une base).

De plus f^2 est diagonalisable, donc, d'après la question 3) iii) de la première partie, f est diagonalisable.

Déterminons le polynôme minimal de f.

Pour cela, cherchons d'abord le polynôme caractéristique de f:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}, L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3+\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3+\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(3+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(3+\lambda)\left(\lambda^3 - 3\right).$$

On en déduit que le polynôme caractéristique de f est:

$$P_f(X) = (3-X)(3+X)\left(X^3 - 3\right) = \left(X - \sqrt{3}\right)\left(X + \sqrt{3}\right)(3-X)(3+X).$$

Comme f est diagonalisable, les racines de m_f sont simples et sont les mêmes que celles de P_f. On en déduit que:

$$m_f(X) = \left(X - \sqrt{3}\right)\left(X + \sqrt{3}\right)(X-3)(X+3).$$

Exercice 11

Partie A

Puisque $E = vect\left\{a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\right\}$, E est un espace vectoriel de dimension n et $\left\{a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\right\}$ est une base de E.

Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Notons :
$$Q(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + ... + \alpha_{n-1} X^{n-1},$$

et :
$$Q(u)(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 u(a) + ... + \alpha_{n-1} u^{n-1}(a).$$

La famille $\{a, u(a), ..., u^{n-1}(a)\}$ étant libre, on a alors :
$$Q(u)(a) = 0 \Leftrightarrow Q = 0.$$

Par conséquent, tout polynôme non nul annulateur de u est de degré au moins n.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de u, noté P_u, est un polynôme annulateur de u. Ce polynôme est de degré n et le coefficient de son terme de plus haut degré est $(-1)^n$. Ainsi, $(-1)^n P_u$ est un polynôme unitaire, annulateur de u de plus petit degré : c'est donc le polynôme minimal de u.

Partie B

1) a) Tout d'abord, notons $m_u(X) = X^k - \alpha_n X^{n-1} - \alpha_{n-1} X^{n-2} - ... - \alpha_2 X - \alpha_1$.

On calcule successivement :
$$\begin{cases} u(x) \in F_x, \\ u(u(x)) = u^2(x) \in F_x, \\ \vdots \\ u(u^{k-2}(x)) = u^{k-1}(x) \in F_x, \\ u(u^{k-1}(x)) = u^k(x) = \alpha_n u^{n-1}(x) + \alpha_{n-1} u^{n-2}(x) + ... + \alpha_2 u(x) - \alpha_1 x \in F_x. \end{cases}$$

L'espace vectoriel F_x est donc stable par u.

b) Pour tout $y \in F_x$, on a :
$$m_u(u_x)(y) = m_u(u)(y) = 0.$$

Le polynôme m_u annule donc l'endomorphisme u_x sur F_x, donc m_u divise le polynôme minimal de u_x, m_{u_x}.

2) a) On a clairement : $\ker(R^{s-1}(u)) \subset \ker(R^s(u))$.

Supposons maintenant par l'absurde que $\ker(R^s(u)) \subset \ker(R^{s-1}(u))$.

Prenons $y \in E$. On a alors :
$$q_u(u)(y) = 0 = (R^s(u) \circ Q(u))(y).$$

Posons :
$$z = (Q(u))(y).$$

On a alors :
$$R^s(u)(z) = 0,$$

donc :

$$z \in \ker(R^s(u)).$$

Par hypothèse, on a alors :

$$z \in \ker\big(R^{s-1}(u)\big).$$

Ainsi :

$$\big(R^{s-1}(u) \circ Q(u)\big)(y) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in E$, le polynôme B défini par :

$$B(X) = \big(R^{s-1} \times Q\big)(X)$$

est un polynôme annulateur de u.

Ceci est impossible, car :

$$\deg\big(R^{s-1} \times Q\big) < \deg\big(R^s \times Q\big) = \deg q_u,$$

ce qui contredit le fait que le polynôme minimal de u soit le polynôme unitaire, annulateur de u de plus petit degré.

b) Prenons $y \in F_x$. Le vecteur y s'écrit alors :

$$y = a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{n-1} u^{n-1}(x).$$

Comme $x \in \ker(R^s(u))$, on a :

$$R^s(u_x)(y) = R^s(u)(y) = 0.$$

On en déduit que R^s est un polynôme annulateur de u_x.

Ainsi, m_{u_x} divise R^s.

Le polynôme m_{u_x} s'écrit donc :

$$m_{u_x}(X) = R^s(X) \text{ } ou \text{ } R^{s-1}(X) \text{ } ou \ldots ou \text{ } R(X).$$

Supposons par l'absurde que m_{u_x} divise R^{s-1}.

On a alors :

$$m_{u_x}(X) = \big(QR^{s-1}\big)(X) \text{ } ou \text{ } PGCD(Q, R) = 1.$$

Comme les polynômes Q et R sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes A et B tels que :

$$AQ + BR = 1.$$

Ainsi, pour tout $y \in F_x$,

$$(A(u) \circ Q(u))(y) + (B(u) \circ R(u))(y) = y.$$

Prenons $y \in \big(R^{s-1}(u)\big)(x)$. On a $y \neq 0$ car $x \notin \ker\big(R^{s-1}(u)\big)$.

De plus:
$$(A(u)\circ Q(u))\big(R^{s-1}(u)\big)(x)+(B(u)\circ R(u))\big(R^{s-1}(u)\big)(x)=\big(R^{s-1}(u)\big)(x),$$

c'est-à-dire:
$$A(u)\circ\Big(Q(u)\circ\big(R^{s-1}(u)\big)(x)\Big)+(B(u)\circ R(u))\big(R^{s-1}(u)\big)(x)=\big(R^{s-1}(u)\big)(x).$$

Comme:
$$\begin{cases}A(u)\circ\Big(Q(u)\circ\big(R^{s-1}(u)\big)(x)\Big)=A(u)\circ q_{u_x}(u)(x)=0,\\(B(u)\circ R(u))\big(R^{s-1}(u)\big)(x)=B(u)\circ(R^{s}(u))(x)=0,\end{cases}$$

on en déduit que:
$$\big(R^{s-1}(u)\big)(x)=0,$$

d'où la contradiction avec le fait que $x\notin\ker\big(R^{s-1}(u)\big)$.

3) a) D'après le lemme des noyaux, on a:
$$E=\ker\big(P_1^{n_1}(u)\big)\oplus\ldots\oplus\ker\big(P_r^{n_r}(u)\big).$$

Soit un polynôme Q tel que $Q(u)(a)=0$. On a alors:
$$Q(u)(a)=Q(u)(x_1)+\ldots+Q(u)(x_r)\ avec\ Q(u)(x_i)\in\ker\big(P_i^{n_i}(u)\big).$$

La somme $\ker\big(P_1^{n_1}(u)\big)\oplus\ldots\oplus\ker\big(P_r^{n_r}(u)\big)$ étant directe et $Q(u)(a)=0$, on a, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, $Q(u)(x_i)=0$.

Comme $Q(u)(x_i)=0$, on a: $\forall y\in F_{x_i}, Q(u)(y)=0$, donc Q est un polynôme qui annule l'endomorphisme u_{x_i}, donc $m_{u_{x_i}}$ divise Q.

Mais, comme le polynôme minimal de u_{x_i} est $P_i^{n_i}$, on en déduit que $P_i^{n_i}$ divise Q.

b) Vu que a est non nul, alors, d'après 1) b), on a: m_{u_a} divise m_u.

Comme:
$$Q(u)(a)=m_{u_a}(u)(a)=0,$$

alors on peut reprendre la question 3) a) avec $Q=m_{u_a}$.

on a donc:
$$\forall i\in\{1,\ldots,n\},\ P_i^{n_i}\ \text{divise}\ m_{u_a},$$

donc, puisque $P_i^{n_i}\wedge P_j^{n_j}=1$, on a:
$$\prod_{i=1}^{r}P_i^{n_i}\ \text{divise}\ m_{u_a},$$

c'est-à-dire:
$$m_u\ \text{divise}\ m_{u_a}.$$

Ainsi, les polynômes m_u et m_{u_a} sont associés. Comme ces deux polynômes sont unitaires, alors $m_u = m_{u_a}$.

c) On a $F_a = vect\left\{a, u(a), ..., u^{k-1}(a)\right\}$, donc le famille $\left\{a, u(a), ..., u^{k-1}(a)\right\}$ est une famille génératrice de F_a.

Soit $\left(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}\right) \in \mathbb{K}^k$ tel que :

$$\alpha_0 a + \alpha_1 u(a) + ... + \alpha_{k-1} u^{k-1}(a) = 0.$$

Soit Q le polynôme défini par :

$$Q(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + ... + \alpha_{k-1} X^{k-1}.$$

On a :

$$Q(u)(a) = 0.$$

Ainsi :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, P_i^{n_i} \textit{ divise } Q,$$

c'est-à-dire, puisque $P_i^{n_i} \wedge P_j^{n_j} = 1$,

$$\prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i} \textit{ divise } Q,$$

soit :

$$m_u \textit{ divise } Q.$$

Or $\deg m_u = k$ et $\deg Q = k-1$, donc $Q = 0$ et $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0$.
Ainsi la famille $\left\{a, u(a), ..., u^{k-1}(a)\right\}$ est libre et donc forme une base.

4) Supposons que $m_u = (-1)^n P_u$.

On a alors $\deg m_u = n$, donc, d'après la partie **B**, il existe $a \neq 0$ tel que $\left\{a, u(a), ..., u^{n-1}(a)\right\}$ soit une base de F_a.

Or $F_a \subset E$ et $\dim F_a = \dim E = n$, donc $F_a = E$.

Ainsi, il existe $a \neq 0$ tel que

$$E = vect\left\{a, u(a), ..., u^{n-1}(a)\right\}.$$

Partie C

- Montrons que i) $\Rightarrow$ ii).

  Supposons que $m_A = (-1)^n P_A$ et notons

$$m_A(X) = X^n - \alpha_n X^{n-1} - ... - \alpha_2 X - \alpha_1.$$

  D'après la partie **B**, il existe $a \neq 0$ tel que :

$$\left\{a, u(a), ..., u^{n-1}(a)\right\}$$

soit une base de E.

Dans cette base, la matrice A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

- Montrons que ii) $\Rightarrow$ i).

Prenons $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$u(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; u^2(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \dots ; u^{n-1}(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\{a, u(a), \dots, u^{n-1}(a)\}$ forme bien une base de E donc, d'après la partie **A**, on a :

$$m_u = (-1)^n P_u,$$

ou alors, d'une point de vue matriciel :

$$m_A = (-1)^n P_A.$$

Exercice 12

1) On calcule :

$$\begin{cases} j(e_1) = e_4 \\ j(e_2) = e_1 \\ j(e_3) = e_2 \\ j(e_4) = e_3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} j^2(e_1) = e_3 \\ j^2(e_2) = e_4 \\ j^2(e_3) = e_1 \\ j^2(e_4) = e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j^3(e_1) = e_2 \\ j^3(e_2) = e_3 \\ j^3(e_3) = e_4 \\ j^3(e_4) = e_1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} j^4(e_1) = e_1 \\ j^4(e_2) = e_2 \\ j^4(e_3) = e_3 \\ j^4(e_4) = e_4. \end{cases}$$

2) Les matrices de J^2, J^3, J^4 sont données respectivement par :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) On remarque que $J^4 - I = 0$, donc le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^4 - 1$$

est un polynôme annulateur non nul de J.

4) Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que $P(J) = 0$.

Montrons que P est le polynôme nul.

On note $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Ce polynôme vérifie $P(J) = 0$, donc :

$$P(J) = \begin{pmatrix} d & c & b & a \\ a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \end{pmatrix} = 0.$$

On en déduit que : $a = b = c = d = 0$, donc P est le polynôme nul.

5) D'après la question précédente, le polynôme minimal de J (qui est un polynôme annulateur non nul!) est de degré supérieur ou égal à 4.

Mais, comme le polynôme $X^4 - 1$ est aussi un polynôme annulateur de J, le polynôme minimal de J divise $X^4 - 1$, donc le polynôme minimal de J, noté m_J, vérifie :

$$X^4 - 1 = m_J(X)Q(X).$$

En comparant les degrés, on a forcement que: $m_J(X) = \alpha\left(X^4 - 1\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Par le fait que tout polynôme minimal est unitaire, on a:

$$m_J(X) = X^4 - 1.$$

6) On a $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$.

Le polynôme minimal m_J est donc scindé sur $\mathbb{C}$ et ses racines sont simples, donc J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

7) Les valeurs propres de J sont les racines du polynôme minimal. Les valeurs propres de J sont donc $\{-1, 1, -i, i\}$.

maths

Chapitre 4

Dualité

1. Rappels de cours

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

▶ **Définition d'une forme linéaire**

Une application linéaire u définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée forme linéaire.

On note E^* (ou $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}(E)$) l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

L'espace vectoriel E^* s'appelle le dual de E.

▶ **Propriété de E^***

La dimension de l'espace vectoriel E^* vérifie: $\dim E^* = \dim E$.

▶ **Définition d'une base duale**

Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base de E.

La famille $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ est appelée base duale de E^* si et seulement si:

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\},\ f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

▶ **Notation**

Soit f une forme linéaire sur E. Soit $x \in E$. On appelle crochet de dualité et on note $\langle .,. \rangle$, l'application de $E^* \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$\langle f, x \rangle = f(x).$$

▶ Définition de la transposée d'une application linéaire

Soit u une application linéaire $u : E \to F$. On appelle transposé de u et on note ${}^t u$ l'application de F^* à valeurs dans E^* telle que :

$$\forall f \in F^*, \forall x \in E, \langle {}^t u(f), x \rangle = \langle f, u(x) \rangle.$$

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

Soit E le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 et soient φ_1, φ_2 et φ_3 les éléments de E^* définis par :

$$\varphi_1(P) = P(1), \varphi_2(P) = P'(1), \varphi_3(P) = \int_0^1 P(x)dx.$$

Montrer que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base de E^*.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (0,1,1,1), v_3 = (0,0,1,1), v_4 = (0,0,0,1).$$

1) Montrer que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2) Déterminer la base duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$. Soient f_1 et f_2 deux éléments de E^* définis par :

$$f_1(P) = \int_0^1 P(x)dx \quad \text{et} \quad f_2(P) = \int_0^2 P(x)dx.$$

1) Montrer que $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2\}$ est une base de E^*.
2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}^*$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit u une application de E dans E définis par :

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1) Montrer que u est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

2) Donner sa matrice dans la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.

3) Déterminer le noyau de ${}^t u$.

4) Donner la matrice de ${}^t u$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 5

Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Montrer que:

1) ${}^t(Id_E) = Id_{E^*}$.

2) Pour tout u et v dans $\mathcal{L}(E,F)$ et pour tout α, β dans $\mathbb{K}$,

$$ {}^t(\alpha u + \beta v) = \alpha {}^t u + \beta {}^t v. $$

3) Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$, alors:

$$ {}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u. $$

4) Si u est un automorphisme de E alors ${}^t u$ est un automorphisme de E^* et:

$$ {}^t(u^{-1}) = ({}^t u)^{-1}. $$

Exercice 6

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ de bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ avec leurs bases duales $\mathcal{B}_1^*$ et $\mathcal{B}_2^*$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Montrer que la matrice de ${}^t u$ par rapport aux bases duales $\mathcal{B}_1^*$ et $\mathcal{B}_2^*$ est égale à la transposé de la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les quatre formes linéaires sur E, f_k $(k = 0,1,2,3)$, définies par:

$$ f_k(P) = \int_{-1}^{1} t^k P(t)dt. $$

1) Montrer que $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E^*.

2) Déterminer sa base duale.

3. Corrigés des exercices

Exercice 1

Soient α, β, γ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \alpha\varphi_1(P) + \beta\varphi_2(P) + \gamma\varphi_3(P) = 0 \quad (*).$$

Prenons P le polynôme défini par :

$$P(X) = (X-1)^2.$$

La relation (*) devient alors :

$$\gamma\int_0^1 (x-1)^2\,dx = 0,$$

c'est-à-dire $\gamma = 0$.

Prenons P le polynôme défini par :

$$P(X) = X - 1.$$

La relation (*) devient alors :

$$\beta\varphi_2(P) = 0,$$

c'est-à-dire $\beta = 0$.

Prenons P le polynôme défini par :

$$P(X) = 1.$$

La relation (*) devient alors :

$$\alpha\varphi_1(P) = 0,$$

c'est-à-dire $\alpha = 0$.

On en déduit que la famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une famille libre de E^*.

Par ailleurs, $\dim E^* = \dim vect\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = 3$, donc $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base de E^*.

Exercice 2

1) Posons la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det P = 1 \neq 0$, donc $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de E^*.

2) Cherchons $f_1 \in E^*$ telle que :

$$\begin{cases} f_1(v_1) = 1 \\ f_1(v_2) = f_1(v_3) = f_1(v_4) = 0. \end{cases}$$

Comme $f_1 \in E^*$, alors la matrice de f_1 est donnée par :

$$\mathcal{M}at(f_1) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix},$$

et f_1 est de la forme :

$$f_1 \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) \to ax + by + cz + dt. \end{array} \right.$$

On obtient donc le système linéaire :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ b + c + d = 0 \\ c + d = 0 \\ d = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$f_1 \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) \to x. \end{array} \right.$$

De la même manière, on montre que :

$$f_2 \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) \to y - x, \end{array} \right.$$

puis que :

$$f_3 \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) \to z - y, \end{array} \right.$$

et enfin que :

$$f_4 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) \to t - z. \end{array} \right.$$

Exercice 3

1) Soient α et β dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X],\ \alpha f_1(P) + \beta f_2(P) = 0. \quad (*)$$

Prenons P le polynôme défini par :

$$P(X) = 1.$$

La relation (*) devient :

$$\alpha + 2\beta = 0.$$

Prenons P le polynôme défini par :

$$P(X) = X.$$

La relation (*) devient :

$$\alpha + 4\beta = 0.$$

On obtient facilement que : $\alpha = \beta = 0$.

On en déduit que la famille $\{f_1, f_2\}$ est libre dans E^*.

Par ailleurs, $\dim E^* = \dim vect\{f_1, f_2\} = 2$, donc $\{f_1, f_2\}$ est une base de E^*.

2) Cherchons deux polynômes P_1 et P_2 tels que :

$$P_1(X) = aX + b \text{ et } P_2(X) = \alpha X + \beta.$$

On doit avoir :

$$\begin{cases} f_1(P_1) = 1 \\ f_1(P_2) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} f_2(P_1) = 0 \\ f_2(P_2) = 1. \end{cases}$$

On obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} + b = 1 \\ \dfrac{\alpha}{2} + \beta = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 1. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne :

$$a = -2\ ;\ b = 2\ ;\ \alpha = 1\ ;\ \beta = \frac{-1}{2}.$$

Ainsi, la base duale de $\{f_1, f_2\}$ est donnée par :

$$\{-2X - 2\ ;\ X - \frac{1}{2}\}.$$

Exercice 4

1) Soient P et Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On montre facilement que :

$$\begin{cases} u(P+Q) = u(P) + u(Q), \\ u(\lambda P) = \lambda u(P). \end{cases}$$

- Déterminons $\ker u$.

Soit $P \in \ker(u)$ et écrivons le polynôme P sous la forme :

$$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u(P) &= aX^3 + bX^2 + cX + d + (1-X)(3aX^2 + 2bX + c) \\ &= -2aX^3 + (3a-b)X^2 + 2bX + (c+d) = 0. \end{aligned}$$

On obtient alors le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a = 0 \\ 3a - b = 0 \\ 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -d \\ d = d \end{cases}, d \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que : $P(X) = c(X-1)$, c'est-à-dire :

$$\ker u = vect\{X - 1\}.$$

- Déterminons $\operatorname{Im} u$.

Le théorème du rang donne :

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \ker u = 4 - 1 = 3.$$

Par ailleurs :

$$\begin{cases} u(1) = 1 \\ u(X) = 1 \\ u(X^2) = -X^2 + 2X \\ u(X^3) = -2X^3 + 3X^2. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\operatorname{Im} u = vect\{1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2\}.$$

2) La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}at(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3) Déterminons $\ker {}^t u$.

Soit $f \in \ker {}^t u$, alors ${}^t u(f) = 0$.

On sait que :

$$\forall x \in E, \langle {}^t u(f), x \rangle = \langle f, u(x) \rangle,$$

donc,

$$\forall x \in E, \langle f, u(x) \rangle = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, f\left(u(x)\right) = 0,$$

soit :

$$\operatorname{Im} u \subset \ker f.$$

Réciproquement, Soit $f \in E^*$ tel que $\operatorname{Im} u \subset \ker f$.

On a alors :

$$\forall x \in E, f\left(u(x)\right) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \langle f, u(x) \rangle = 0,$$

soit :

$$\forall x \in E, \langle {}^t u(f), x \rangle = \langle f, u(x) \rangle = 0.$$

Ainsi :

$$\ker{}^t u = \Big\{ f \in E^*,\ \operatorname{Im} u \subset \ker f \Big\}.$$

4) La matrice de ${}^t u$ est donnée par :

$$\mathcal{M}at({}^t u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Une explication de ce résultat sera donnée dans la correction de l'exercice 6.

Exercice 5

1) Soient $f \in E^*$ et $x \in E$.

On sait que :

$$\langle {}^t(Id_E)(f), x\rangle = \langle f, Id_E(x)\rangle.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle {}^t(Id_E)(f), x\rangle &= \langle f, Id_E(x)\rangle \\ &= \langle f, x\rangle \\ &= \langle Id_{E^*}(f), x\rangle. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\langle {}^t(Id_E)(f) - Id_{E^*}(f), x\rangle = 0.$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout x dans E, on obtient :

$${}^t(Id_E)(f) - Id_{E^*}(f) = 0,$$

soit :

$${}^t(Id_E)(f) = Id_{E^*}(f).$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout $f \in E^*$, on en déduit que :

$${}^t(Id_E) = Id_{E^*}.$$

2) Soient $f \in F^*$ et $x \in E$.

On sait que :

$$\langle {}^t(\alpha u + \beta v)(f), x\rangle = \langle f, (\alpha u + \beta v)(x)\rangle.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle {}^t(\alpha u+\beta v)(f),x\rangle &= \langle f,(\alpha u+\beta v)(x)\rangle\\ &= \langle f,\alpha u(x)+\beta v(x)\rangle\\ &= \alpha\langle f,u(x)\rangle+\beta\langle f,v(x)\rangle\\ &= \alpha\langle {}^t u(f),x\rangle+\beta\langle {}^t v(f),x\rangle\\ &= \langle \alpha {}^t u(f)+\beta {}^t v(f),x\rangle\\ &= \langle (\alpha {}^t u+\beta {}^t v)(f),x\rangle.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\langle {}^t(\alpha u+\beta v)(f)-(\alpha {}^t u+\beta {}^t v)(f),x\rangle = 0.$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout x dans E, on obtient :

$${}^t(\alpha u+\beta v)(f)-(\alpha {}^t u+\beta {}^t v)(f) = 0,$$

soit :

$${}^t(\alpha u+\beta v)(f)=(\alpha {}^t u+\beta {}^t v)(f).$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout $f\in F^*$, on en déduit que :

$${}^t(\alpha u+\beta v)=\alpha {}^t u+\beta {}^t v.$$

3) Soient $f\in G^*$ et $x\in E$.

On sait que :

$$\langle {}^t(u\circ v)(f),x\rangle = \langle f,(u\circ v)(x)\rangle.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle {}^t(u\circ v)(f),x\rangle &= \langle f,(u\circ v)(x)\rangle\\ &= \langle f,u(v(x))\rangle\\ &= \langle {}^t u(f),v(x)\rangle\\ &= \langle ({}^t v\circ {}^t u)(f),x\rangle.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\langle {}^t(u\circ v)(f)-({}^t v\circ {}^t u)(f),x\rangle = 0.$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout x dans E, on obtient :

$${}^t(u\circ v)(f)-({}^t v\circ {}^t u)(f)=0,$$

soit :

$${}^t(u\circ v)(f)=({}^t v\circ {}^t u)(f).$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout $f \in G^*$, on en déduit que:

$${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u.$$

4) Montrons que ${}^t u$ est un automorphisme de E^*.

Soit $f \in E^*$ tel que ${}^t u(f) = 0$. Montrons que $f = 0$.

On a, pour tout x dans E:

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle {}^t u(f), x\rangle}_{=0} &= \langle f, u(x)\rangle \\ &= f(u(x)) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\operatorname{Im} u \subset \ker u \subset E.$$

Or u est un automorphisme de E donc $\operatorname{Im} u = E$. Ainsi:

$$\ker f = E,$$

c'est-à-dire:

$$f = 0.$$

De plus, on a:

$$\begin{aligned} {}^t\left(u \circ u^{-1}\right) &= {}^t\left(Id_E\right) \\ &= Id_{E^*} \quad \text{d'après 1)} \\ &= {}^t\left(u^{-1}\right) \circ {}^t u \quad \text{d'après 3)}. \end{aligned}$$

Donc:

$${}^t(u^{-1}) \circ {}^t u = Id_{E^*},$$

soit:

$${}^t(u^{-1}) = ({}^t u)^{-1}.$$

Exercice 6

On note $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_1^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale.

De la même manière, on note: $\mathcal{B}_2 = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_2^* = (e_1'^*, \ldots, e_p'^*)$ sa base duale.

La matrice de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est donnée par :

$$\mathcal{M}at(u) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_p \end{matrix} \end{array}$$

De même, la matrice de ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*,E^*)$ est donnée par :

$$\mathcal{M}at({}^t u) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} {}^t u(e_1'^*) & {}^t u(e_2'^*) & \cdots & {}^t u(e_p'^*) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e^*{}_1 \\ e^*{}_2 \\ \vdots \\ e^*{}_n \end{matrix} \end{array}$$

Montrons que, pour tout $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,p\}$, $a_{ij} = b_{ji}$.

Soit $i \in \{1,...,n\}$ et $j \in \{1,...,p\}$.

Par définition de la transposé ${}^t u$, on a la relation suivante :

$$\left\langle {}^t u(e_i'^*), e_j \right\rangle = \left\langle e_i'^*, u(e_j) \right\rangle.$$

Le premier membre de cette relation nous donne :

$$\begin{aligned} \left\langle {}^t u(e_i'^*), e_j \right\rangle &= \langle b_{1i} e_1{}^* + \ldots + b_{ni} e_n{}^*, e_j \rangle \\ &= b_{1i} \underbrace{\langle e_1{}^*, e_j \rangle}_{=0} + \ldots + b_{ji} \underbrace{\langle e_j{}^*, e_j \rangle}_{=1} + \ldots + b_{ni} \underbrace{\langle e_n{}^*, e_j \rangle}_{=0} \\ &= b_{ji}, \end{aligned}$$

tandis que le second membre de cette relation donne :

$$\begin{aligned} \langle e_i'^*, u(e_j) \rangle &= \langle e_i'^*, a_{1j} e_1' + \ldots + a_{pj} e'_p \rangle \\ &= a_{1j} \underbrace{\langle e_i'^*, e'_1 \rangle}_{=0} + \ldots + a_{ij} \underbrace{\langle e_i'^*, e'_i \rangle}_{=1} + \ldots + a_{pj} \underbrace{\langle e_i'^*, e'_p \rangle}_{=0} \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\forall (i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,p\},\ a_{ij} = b_{ji},$$

et la matrice de ${}^t u$ relativement aux bases $\mathcal{B}_1^*$ et $\mathcal{B}_2^*$ est la transposé de la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Exercice 7

1) Montrons dans un premier temps que la famille $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ est libre.

Soient α, β, γ et δ dans $\mathbb{R}$ tels que:

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \alpha f_0(P) + \beta f_1(P) + \gamma f_2(P) + \delta f_3(P). \quad (*)$$

Prenons le polynôme P défini par:

$$P(X) = 1.$$

La relation (*) devient alors:

$$2\alpha + \frac{2}{3}\gamma = 0.$$

Prenons le polynôme P défini par:

$$P(X) = X.$$

La relation (*) devient alors:

$$\frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\delta = 0.$$

Prenons le polynôme P défini par:

$$P(X) = X^2.$$

La relation (*) devient alors:

$$\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma = 0.$$

Prenons le polynôme P défini par:

$$P(X) = X^3.$$

La relation (*) devient alors:

$$\frac{2}{5}\beta + \frac{2}{7}\delta = 0.$$

On obtient donc le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma = 0 & (1) \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma = 0 & (2) \\ \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\delta = 0 & (3) \\ \frac{2}{5}\beta + \frac{2}{7}\delta = 0 & (4) \end{cases}$$

La résolution de (1) et (2) donne facilement: $\alpha = \gamma = 0$. De la même manière, la résolution de (3) et (4) donne: $\beta = \delta = 0$.

On en déduit que la famille $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ est libre.

On a de plus:

$$\dim E^* = \dim vect\{f_0, f_1, f_2, f_3\} = 4,$$

donc la famille $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E^*.

2) Cherchons un polynôme P_0 sous la forme

$$P_0(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d,$$

tel que:

$$f_0(P_0) = 1 \,;\, f_1(P_0) = 0 \,;\, f_2(P_0) = 0 \,;\, f_3(P_0) = 0.$$

On obtient le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}b + 2d = 1 & (1) \\ \dfrac{2}{5}a + \dfrac{2}{3}c = 0 & (2) \\ \dfrac{2}{5}b + \dfrac{2}{3}d = 0 & (3) \\ \dfrac{2}{7}a + \dfrac{2}{5}c = 0 & (4) \end{cases}$$

dont la solution est:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{-15}{8} \\ c = 0 \\ d = \dfrac{9}{8}, \end{cases}$$

c'est-à-dire:

$$P_0(X) = \frac{-15}{8}X^2 + \frac{9}{8}.$$

- De la même façon, on cherche un polynôme P_1 sous la forme:

$$P_1(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d,$$

tel que:

$$f_0(P_1) = 0 \,;\, f_1(P_1) = 1 \,;\, f_2(P_1) = 0 \,;\, f_3(P_1) = 0.$$

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}b + 2d = 0 & (1) \\ \dfrac{2}{5}a + \dfrac{2}{3}c = 1 & (2) \\ \dfrac{2}{5}b + \dfrac{2}{3}d = 0 & (3) \\ \dfrac{2}{7}a + \dfrac{2}{5}c = 0 & (4) \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} a = \dfrac{-105}{8} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{75}{8} \\ d = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$P_1(X) = \frac{-105}{8}X^3 + \frac{75}{8}X.$$

- De la même façon, on cherche un polynôme P_2 sous la forme :

$$P_2(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d,$$

tel que :

$$f_0(P_2) = 0 \,;\, f_1(P_2) = 0 \,;\, f_2(P_2) = 1 \,;\, f_3(P_2) = 0.$$

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}b + 2d = 0 & (1) \\ \dfrac{2}{5}a + \dfrac{2}{3}c = 0 & (2) \\ \dfrac{2}{5}b + \dfrac{2}{3}d = 1 & (3) \\ \dfrac{2}{7}a + \dfrac{2}{5}c = 0 & (4) \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{45}{8} \\ c = 0 \\ d = \dfrac{-15}{8}, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$P_2(X) = \frac{-45}{8} X^2 - \frac{15}{8}.$$

- De la même façon, on cherche un polynôme P_3 sous la forme :

$$P_3(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d,$$

tel que :

$$f_0(P_3) = 0\ ;\ f_1(P_3) = 0\ ;\ f_2(P_3) = 0\ ;\ f_3(P_3) = 1.$$

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}b + 2d = 0 & (1) \\ \dfrac{2}{5}a + \dfrac{2}{3}c = 0 & (2) \\ \dfrac{2}{5}b + \dfrac{2}{3}d = 0 & (3) \\ \dfrac{2}{7}a + \dfrac{2}{5}c = 1 & (4) \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} a = \dfrac{175}{8} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{-105}{8} \\ d = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$P_3(X) = \frac{175}{8} X^3 - \frac{105}{8} X.$$

Chapitre 5

Formes quadratiques

1. Rappels de cours

a) Formes bilinéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Formes bilinéaires

1) Définition d'une forme bilinéaire

Une forme bilinéaire est une application $b : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que, pour tout x, y et z dans E et pour tout λ dans $\mathbb{K}$, on a:

$$\begin{cases} b(x+z,y) = b(x,y) + b(z,y) \\ b(\lambda x,y) = \lambda b(x,y) \\ \\ b(x,y+z) = b(x,y) + b(x,z) \\ b(x,\lambda y) = \lambda b(x,y). \end{cases}$$

2) Matrice d'une forme bilinéaire

La matrice d'une forme linéaire b dans une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est donnée par:

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_1,e_2) & \cdots & b(e_1,e_n) \\ b(e_2,e_1) & b(e_2,e_2) & \cdots & b(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_n,e_1) & b(e_n,e_2) & \cdots & b(e_n,e_n) \end{pmatrix}.$$

On a alors, pour tout vecteur x et y de coordonnées respectives X et Y dans la base $\mathcal{B}$:

$$b(x,y) = X^T \times \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(b) \times Y.$$

3) Rang, noyau d'une forme bilinéaire

- On appelle rang de b, noté $rg(b)$, le rang de la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(b)$.
- On appelle noyau de b, noté $\ker(b)$, le sous-espace vectoriel :
$$\ker(b) = \{y \in E \ / \ \forall x \in E, b(x,y) = 0\}.$$
- On dit que b est non dégénérée si et seulement si
$$\ker(b) = \{0\},$$
ou encore, si et seulement si :
$$rg(b) = \dim E.$$

b) Formes bilinéaires symétriques

1) Définition

On dit que b est une forme bilinéaire symétrique si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, b(x,y) = b(y,x).$$

2) Orthogonalité pour les formes bilinéaires symétriques

Soit b une forme bilinéaire sur E.

- On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux pour b si seulement si
$$b(x,y) = 0.$$
- Soit F un sous-espace vectoriel de E.
L'orthogonal de F, noté $F^{\perp}$, est le sous-espace vectoriel défini par :
$$F^{\perp} = \{y \in E \ / \ \forall x \in F, b(x,y) = 0\}.$$
Dans la pratique, pour calculer l'orthogonal de F, on donne successivement comme valeurs à x les éléments d'une base de F, ce qui aboutit à un système linéaire à résoudre.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :
$$\dim F + \dim F^{\perp} \geq \dim E.$$
Si, de plus, b est non dégénérée, alors :
$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E \text{ et } (F^{\perp})^{\perp} = F.$$

- Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base E.

  On dit que B est une base orthogonale pour b si et seulement si, pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$:
  $$b(e_i, e_j) = 0.$$

c) Formes quadratiques

1) Définition d'une forme quadratique

Une forme quadratique sur E est une application q de E dans $\mathbb{K}$ telle que :

i) Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.

ii) L'application b_q de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ définie par :
$$b_q(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$
est une forme bilinéaire symétrique sur E.

2) Matrice d'une forme quadratique

Si q est une forme quadratique sur E et b_q la forme bilinéaire symétrique associée, la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(b_q)$ de b_q relativement à la base $\mathcal{B}$ est aussi appelée matrice de q relativement à $\mathcal{B}$ est notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(q)$.

On a alors, pour tout vecteur $x \in E$ de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$:
$$q(x) = b_q(x, x) = X^T \times \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(q) \times X.$$

3) Forme polaire

Soit q une forme quadratique sur E, alors la forme bilinéaire symétrique suivante :
$$b_q(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$
est appelée forme polaire.

4) Rang, noyau et vecteurs isotropes d'une forme quadratique

On dit que q est dégénérée si et seulement si la forme polaire b_q est dégénérée.

On appelle rang de q le rang de b_q.

On dit qu'un vecteur $x \in E$ est isotrope pour q si et seulement si $q(x) = 0$.

5) Signature d'une forme quadratique

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Soient q une forme quadratique et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E orthogonale pour b_q.

On note :

$$\begin{cases} p = card\left\{i \in \{1,\dots,n\} \;/\; q(e_i) > 0\right\} \\ \\ m = card\left\{i \in \{1,\dots,n\} \;/\; q(e_i) < 0\right\}. \end{cases}$$

Alors, la signature de q, notée $sign(q)$, est le couple :

$$sign(q) = (p, m).$$

La signature de q ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. De plus, on a :

$$rg(q) = p + m.$$

6) Méthode de réduction en carrés de Gauss

Soit q une forme quadratique donnée dans une base de E par une expression de la forme :

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j.$$

La méthode de réduction en carrés de Gauss consiste à écrire q sous la forme d'une somme ou différence de carrés, selon le procédé suivant :

- 1er cas

  Il existe au moins un indice i tel que $a_{ii} \neq 0$; supposons par exemple $a_{11} \neq 0$.

  Alors, q est un polynôme du second degré en x_1 et on écrit :

  $$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} x_1^2 + 2\alpha x_1 + \beta$$

  $$= a_{11}(x_1 + \frac{\alpha}{a_{11}})^2 + R \text{ (Décomposition canonique du trinôme)}$$

  où α est un polynôme de degré 1 en $x_2, \dots, x_n$.

- 2e cas

  Pour tout indice i, $a_{ii} = 0$; supposons par exemple $a_{12} \neq 0$.

  Alors, q s'écrit :

  $$\begin{aligned} q(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 2a_{12} x_1 x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma \\ &= 2a_{12}(x_1 + \frac{\beta}{2a_{12}})\left(x_2 + \frac{\alpha}{2a_{12}}\right) + \gamma - \frac{\alpha\beta}{2a_{12}}. \end{aligned}$$

  On utilise ensuite la relation :

  $$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2.$$

Ainsi, la forme quadratique q devient :

$$q(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{a_{12}}{2}\left(x_1+x_2+\frac{\alpha+\beta}{2a_{12}}\right)^2-\frac{a_{12}}{2}\left(x_1-x_2+\frac{\beta-\alpha}{2a_{12}}\right)^2+\gamma-\frac{\alpha\beta}{2a_{12}}.$$

Les polynômes $R=\gamma-\dfrac{\alpha\beta}{2a_{12}}$, α, β sont des polynômes de degrés respectifs 2, 1, 1 et R ne dépend ni de x_1 ni de x_2.

On recommence le procédé avec le polynôme R obtenu au 1er cas ou au 2e cas.

Après un nombre fini d'opérations, on obtient :

$$q(x)=\sum_{i=1}^{p}\mu_i(f_i(x))^2,$$

où les f_i sont des formes linéaires sur E.

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

On considère les applications $b_1:\mathcal{C}^1([0,1])\times\mathcal{C}^1([0,1])\to\mathbb{R}$ et $b_2:\mathbb{R}_3[X]\times\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}$, définies par :

$$b_1(u,v)=u(0)v(0)+\int_0^1 u'(t)v'(t)dt,$$
$$b_2(u,v)=u(0)v(1).$$

1) Vérifier qu'il s'agit de deux formes bilinéaires. Déterminer les parties symétrique et antisymétrique de b_1 et b_2.
2) Écrire la matrice de b_2 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et préciser si b_2 est dégénérée.

Exercice 2

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $b:E\times E\to\mathbb{R}$ l'application suivante :

$$b(P,Q)=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

1) Montrer que b est bien définie et ensuite que b est une forme bilinéaire symétrique. Que peut-on dire des polynômes P satisfaisant $b(P,P)=0$?
2) Pour $n=2$, écrire sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Montrer que $\{X+1, X^2-1, X-X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de b et l'expression de la forme bilinéaire dans cette nouvelle base.

Exercice 3

Soient E un espace vectoriel réel de base $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ et $b: E\times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire définie par :

$$b(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2+13x_3y_3-x_1y_2-x_2y_1+3x_1y_3+3x_3y_1-5x_2y_3-5x_3y_2.$$

1) Écrire la matrice A de b relativement à la base $\mathcal{B}$ et préciser le rang de la forme bilinéaire associée. Déterminer le noyau de b.
2) Soient $u\in\mathcal{L}(E)$ et $g: E\times E\to\mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, telle que :

$$b(x,y)=g(u(x),y),\ \forall x,y\in E.$$

Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$, en fonction des matrices A de b et S de g.

Montrer que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont b-orthogonaux et g-orthogonaux à la fois.

Exercice 4

On considère la forme bilinéaire $b:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ suivante :

$$b(x,y)=x_1y_2+x_2y_1-3x_1y_3-3x_3y_1-3x_2y_4-3x_4y_2+x_3y_4+x_4y_3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^4.$$

1) Écrire la matrice de b relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et préciser le rang de b. Quel est son noyau ?
2) Donner la forme quadratique q associée.
3) Trouver une réduction de Gauss en précisant une base q-orthogonale et la signature de q.
4) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

Exercice 5

Soit E un sous-espace réel de dimension n. Soient a un vecteur non nul de E, q une forme quadratique sur E dont le seul vecteur isotrope est le vecteur nul et b sa forme polaire. On définit $\varphi: E\to\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x)=q(a)q(x)-(b(a,x))^2.$$

1) Montrer que φ est une forme quadratique et donner sa forme polaire.
2) Quel est le noyau de φ ? Quel est son rang ?
3) Que dire de φ si q est positive.

Exercice 6

Soit l'application :

$$q(x) = 16x_1^2 - 16x_2^2 + 5x_3^2 - 16x_1x_3 + 16x_2x_3 + 2x_3x_4,\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

1) Vérifier que q est une forme quadratique. Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la forme polaire associée b.

2) Donner une réduction de Gauss, en précisant une base orthogonale ainsi que le rang et la signature de q.

3) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes.

4) Trouver l'orthogonal de $F = vect\{e_1, e_2 + 2e_3\}$.

Exercice 7

Trouver les réductions de Gauss des formes quadratiques suivantes, en précisant une base orthogonale ainsi que le rang et la signature. On précisera, pour chaque forme quadratique, la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la forme polaire associée.

1) $q_1(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3$,

2) $q_2(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 - 4x_1x_3 + 2x_1x_2$,

3) $q_3(x) = 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$.

Exercice 8

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = x^2 - 2yz - xz.$$

1) Déterminer le rang et la signature de q.

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q.

2) Pour chaque réel t, on note $(\mathcal{P}_t)$ le plan d'équation

$$3x + 2y + tz = 0.$$

Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $\mathcal{P}_t$ contient un vecteur isotrope non nul, puis celles pour lesquelles la restriction de q à $\mathcal{P}_t$ est dégénérée.

3. Corrigés des exercices

Exercice 1

1) Prenant u, v et w dans $C^1([0,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on montre facilement que:

$$\begin{cases} b_1(u+v,w) = b_1(u,w) + b_1(v,w) \\ b_1(u,v+w) = b_1(u,v) + b_1(u,w) \\ \\ b_1(\lambda u, v) = \lambda b_1(u,v) \\ b_1(u,\lambda v) = \lambda b_1(u,v), \end{cases}$$

et que:

$$\begin{cases} b_2(u+v,w) = b_2(u,w) + b_2(v,w) \\ b_2(u,v+w) = b_2(u,v) + b_2(u,w) \\ \\ b_2(\lambda u, v) = \lambda b_2(u,v) \\ b_2(u,\lambda v) = b_2\lambda(u,v). \end{cases}$$

La partie symétrique de b_1 est $b_{1S}(u,v) = b_1(u,v)$.

La partie antisymétrique de b_1 est $b_{1a}(u,v) = 0$, car b_1 est symétrique.

La partie symétrique de b_2 est:

$$b_{2S}(u,v) = \frac{1}{2}[u(0)v(1) + v(0)u(1)].$$

La partie antisymétrique de b_2 est:

$$b_{2a}(u,v) = \frac{1}{2}[u(0)v(1) - v(0)u(1)].$$

2) La matrice de b_2 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme bilinéaire b_2 est dégénérée car, par exemple $b_2(X,P) = 0$, $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

1) Montrons que b est définie.

Pour cela, on va montrer que les intégrales de la forme $\int_{-1}^{1} \frac{t^q}{\sqrt{1-t^2}} dt$ sont définies pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Si $q = 0$, $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin(t)]_{-1}^{1} = \pi$.

Si $q = 1$, $\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[\frac{-1}{2}\sqrt{1-t^2}\right]_{-1}^{1} = 0$.

Supposons $q \geq 2$.

On écrit, pour $0 < A < 1$, grâce à une intégration par parties:

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t^q}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_0^A t^{q-1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \left[\frac{-t^{q-1}}{2}\sqrt{1-t^2}\right]_0^A + \frac{q-1}{2}\int_0^A t^{q-2}\sqrt{1-t^2}\, t dt.\end{aligned}$$

Lorsque $A \to 1$, les deux termes figurant dans le membre de droite ont une limite, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^q}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est bien définie. De la même façon, on montre que les intégrales du type $\int_{-1}^{0} \frac{t^q}{\sqrt{1-t^2}} dt$ sont bien définies et que finalement, la forme bilinéaire b est bien définie.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $b(P,P) = 0$.

On a alors:

$$\int_{-1}^{1} \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0.$$

Or, l'application $t \mapsto \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]0,1[$, donc

$$\forall t \in]0,1[, \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0,$$

c'est-à-dire:

$$\forall t \in]0,1[, P(t) = 0.$$

Le polynôme P possède une infinité de racines sur $]0,1[$: c'est donc le polynôme nul.

2) Pour donner cette matrice, on a besoin de calculer:

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^q}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{pour} \quad q \in \{1, \ldots, 4\}.$$

Effectuons le chagement de variable: $t = \cos\theta$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^q}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\cos\theta)^q}{\sqrt{1-(\cos\theta)^2}} \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} (\cos\theta)^q \, d\theta.$$

Si q est impair, alors:

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^q}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0.$$

Si $q = 0$, alors:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \pi.$$

Si $q = 2$, alors:

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi} (\cos\theta)^2 \, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Si $q = 4$, alors, en utilisant les formules d'Euler:

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi} (\cos\theta)^4 \, d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos(4\theta)}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{4} + \frac{3}{8}\right) d\theta = \frac{3\pi}{8}.$$

La matrice de b est donc:

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{8} \end{pmatrix}.$$

3) Montrons que $\{X+1, X^2-1, X-X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On définit la matrice P par:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible donc $\{X+1, X^2-1, X-X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

La matrice de b dans cette nouvelle base est :

$$A' = P^T AP = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{8} & \frac{\pi}{8} \\ 0 & \frac{\pi}{8} & \frac{7\pi}{8} \end{pmatrix}.$$

Autre méthode : En calculant directement les termes :

$$b(X+1, X+1)\,;\, b(X^2-1, X^2-1)\,;\, b(X-X^2, X-X^2)\,; \quad \text{etc...}$$

Exercice 3

1) La matrice de b relativement à la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 13 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\det A = 0$, donc $rg(A) = 2$.

Cherchons le noyau de b:

On résout le système linéaire :

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 & (1) \\ -x + 2y - 5z = 0 & (2) \\ 3x - 5y + 13z = 0 & (3) \end{cases}$$

Le calcul de (1)+(2) donne : $y = 2z$.

En remplaçant dans (3), on trouve : $x = z$.

Ainsi :

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 2z\ ,\ z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

Le noyau de b est donné par :

$$vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

2) Soient X et Y deux vecteurs de E.

La forme bilinéaire b s'écrit matriciellement :

$$b(X,Y) = X^T A Y.$$

D'autre part, la forme bilinéaire $g(u(.),.)$ s'écrit matriciellement :

$$g(u(X),Y) = (MX)^T SY = X^T M^T SY.$$

Par identification, on trouve :

$$A = M^T S.$$

Comme g est non dégénérée (*i.e.* $rg(S) = n$, donc S est inversible), on a :

$$\begin{aligned} M &= (AS^{-1})^T \\ &= (S^{-1})^T A^T \\ &= (S^{-1})^T A, \text{ car } A \text{ est symétrique} \\ &= \left(S^T\right)^{-1} A, \text{ car } \left(S^{-1}\right)^T = \left(S^T\right)^{-1} \\ &= S^{-1}A, \text{ car } S \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

Soient X un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ et Y un vecteur propre de u associé à la valeur propre μ avec $\lambda \neq \mu$.

On a donc :

$$b(X,Y) = g(u(X),Y) = \lambda g(X,Y).$$

Par ailleurs, on a :

$$b(Y,X) = \mu g(Y,X) = \mu g(X,Y).$$

Comme b est symétrique, on en déduit que : $(\lambda - \mu)\, g(X,Y) = 0$.

Or $\lambda \neq \mu$, donc $g(X,Y) = 0$ et donc les vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont g-orthogonaux.

De plus, $b(X,Y) = 0$ donc les vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont b-orthogonaux.

Exercice 4

1) La matrice de b relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule que $\det A \neq 0$, donc $rg(b) = 4$ et le noyau de b est $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

2) La forme quadratique q associée est donnée par :

$$q(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_4x_2 + 2x_4x_3.$$

3) La méthode de réduction en carrés de Gauss donne :

$$\begin{aligned} q(x) &= 2x_1(x_2 - 3x_3) - 6x_4x_2 + 2x_4x_3 \\ &= 2x_2(x_1 - 3x_4) - 6x_1x_3 + 2x_4x_3. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} u_1 = x_2 - 3x_3 \\ u_2 = x_1 - 3x_4. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} q(x) &= 2u_1u_2 - 18x_4x_3 + 2x_4x_3 \\ &= 2u_1u_2 - 16x_4x_3 \\ &= 2(x_2 - 3x_3)(x_1 - 3x_4) - 16x_4x_3 \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4)^2 \\ &\qquad - 4(x_3 + x_4)^2 + 4(x_3 - x_4)^2. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que $sign(q) = (2,2)$.

- Recherche de la base q-orthogonale

  On pose :

$$\begin{cases} X = \dfrac{x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4}{\sqrt{2}} \\ Z = 2x_3 + 2x_4 \\ T = 2x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

  Inversons ce système :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X + \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y + \dfrac{3}{4}Z - \dfrac{3}{4}T \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y + \dfrac{3}{4}Z + \dfrac{3}{4}T \\ x_3 = \dfrac{Z + T}{4} \\ x_4 = \dfrac{Z - T}{4}. \end{cases}$$

Posons maintenant P la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

On définit la base orthogonale pour q par :

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} ; v_4 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \right\}.$$

4) Déterminons l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

Soit $U = (X, Y, Z, T)$ un vecteur isotrope de q.

On a alors : $q(U) = X^2 - Y^2 + Z^2 - T^2 = 0$, donc $X^2 + Z^2 = Y^2 + T^2$.

L'ensemble des vecteurs isotropes de q est l'ensemble des vecteurs de coordonnées (X, Y, Z, T) tels que :

$$X^2 + Z^2 = Y^2 + T^2.$$

Exercice 5

1) On rappelle que la forme polaire de q est donnée par :

$$b(X,Y) = \frac{1}{2}[q(X+y) - q(X) - q(Y)].$$

Donnons maintenant la forme polaire de φ :

On calcule pour cela :

$$\begin{aligned} \varphi(X+Y) - \varphi(X) - \varphi(Y) &= q(a)q(X+Y) - (b(a, X+Y))^2 - q(a)q(X) \\ &\quad + (b(a,X))^2 - q(a)q(Y) + (b(a,Y))^2 \\ &= q(a)\big(q(X+Y) - q(X) - q(Y)\big) - \big(b(a, X+Y)\big)^2 \\ &\quad + (b(a,X))^2 + \big(b(a,Y)\big)^2 \\ &= 2q(a)b(X,Y) - (b(a, X+Y))^2 \\ &\quad + (b(a,X))^2 + \big(b(a,Y)\big)^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}(b(a,X+Y))^2 &= (b(a,X)+b(a,Y))^2\\ &= (b(a,X))^2+2b(a,X)b(a,Y)+(b(a,Y))^2.\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\varphi(X+Y)-\varphi(X)-\varphi(Y) &= 2q(a)b(X,Y)-(b(a,X))^2-2b(a,X)b(a,Y)\\ &\quad -(b(a,Y))^2+(b(a,X))^2+(b(a,Y))^2\\ &= 2q(a)b(X,Y)-2b(a,X)b(a,Y).\end{aligned}$$

La forme polaire de φ, notée b_φ est donnée par :

$$b_\varphi(X,Y)=q(a)b(X,Y)-b(a,X)b(a,Y).$$

2) On rappelle que le noyau de φ est l'ensemble $N_\varphi=\{X\in E \ / \ b_\varphi(X,Y)=0, \forall Y\in E\}$.

Soit $X\in N_\varphi$, alors, $\forall Y\in E$,

$$q(a)b(X,Y)-b(a,X)b(a,Y)=0,$$

donc :

$$b(q(a)X,Y)-b(b(a,X)a,Y)=0,$$

c'est-à-dire :

$$b(q(a)X-b(a,X)a,Y)=0.$$

Posons $U=q(a)X-b(a,X)a$, on a ainsi $\forall Y\in E, b(U,Y)=0$.

Prenons $Y=U$, dans ce cas, $q(U)=0$, donc U est un vecteur isotrope pour q.

Or le seul vecteur isotrope de q est le vecteur nul, donc $U=0$.

Ainsi, $q(a)X-b(a,X)a=0$, donc $X=\dfrac{b(a,X)}{q(a)}a=\lambda a$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

On a donc $N_\varphi\subset vect\{a\}$.

Réciproquement, tout vecteur de la forme λa appartient à N_φ.

En effet, $\forall Y\in E, b_\varphi(\lambda a,Y)=\lambda q(a)b(a,Y)-\lambda b(a,a)b(a,Y)=0$, donc λa est dans le noyau de φ.

3) On va montrer que φ est positive.

Prenons $x\in E$ et considérons le vecteur $y=x+ta$ où $t\in\mathbb{R}$.

La forme quadratique q est positive donc $q(x+ta)\geq 0$, c'est-à-dire :

$$b(x+ta,x+ta)\geq 0,$$

soit :

$$b(x,x)+2tb(a,x)+t^2b(a,a)\geq 0,$$

ou encore :

$$q(x) + 2tb(a,x) + q(a)t^2 \geq 0.$$

On obtient ainsi un polynôme du second degré en t qui est positif ou nul pour tout t dans $\mathbb{R}$.

On en déduit que son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire :

$$\Delta = 4(b(a,x))^2 - 4q(x)q(a) \leq 0,$$

soit :

$$q(x)q(a) - (b(a,x))^2 \geq 0,$$

ce qui signifie que φ est positive ou nulle.

Exercice 6

1) La forme q est de la forme : $q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_i x_j$, donc q est bien une forme quadratique.

Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -16 & 8 & 0 \\ -8 & 8 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme polaire associée b est :

$$b(x,y) = 16x_1y_1 - 16x_2y_2 + 5x_3y_3 - 8x_1y_3 - 8x_3y_1 + 8x_2y_3 + 8x_3y_2 + x_3y_4 + x_4y_3.$$

2) La méthode de réduction en carrés de Gauss donne successivement :

$$q(x) = 16\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 4x_3^2 - 16x_2^2 + 5x_3^2 + 16x_2x_3 + 2x_3x_4$$

$$q(x) = 16\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 16x_2^2 + x_3^2 + 16x_2x_3 + 2x_3x_4$$

$$q(x) = 16\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 16\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 4x_3^2 + x_3^2 + 2x_3x_4$$

$$q(x) = 16\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 16\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 5x_3^2 + 2x_3x_4$$

$$q(x) = 16\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 16\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 5\left(x_3 + \frac{1}{5}x_4\right)^2 - \frac{1}{5}x_4^2,$$

soit :

$$q(x) = (4x_1 - 2x_3)^2 - (4x_2 - 2x_3)^2 + \left(\sqrt{5}x_3 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_4\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_4\right)^2.$$

On en déduit immédiatement que $rg(q) = 4$ et que $sign(q) = (2,2)$.

- Recherche de la base orthogonale pour q

  Posons

$$\begin{cases} X = 4x_1 - 2x_2 \\ Y = 4x_2 - 2x_3 \\ Z = \sqrt{5}x_3 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_4 \\ T = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_4. \end{cases}$$

Inversons ce système linéaire :

$$\begin{cases} 4x_1 = \dfrac{1}{4}X + \dfrac{1}{8}Y + \dfrac{1}{4\sqrt{5}}Z - \dfrac{1}{4\sqrt{5}}T \\ x_2 = \dfrac{1}{4}Y + \dfrac{1}{2\sqrt{5}}Z - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}T \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}Z - \dfrac{1}{\sqrt{5}}T \\ x_4 = T\sqrt{5}. \end{cases}$$

Posons maintenant P la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{4\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

On définit la base orthogonale pour q par :

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} ; v_4 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

3) Dans cette base, q s'écrit :

$$q(X,Y,Z,T) = X^2 - Y^2 + Z^2 - T^2.$$

Soit $U = (X,Y,Z,T)$ est vecteur isotrope.

Alors $q(X,Y,Z,T) = 0$, c'est-à-dire : $X^2 + Z^2 = Y^2 + T^2$.

L'ensemble des vecteurs isotropes est l'ensemble des vecteurs $U = (X,Y,Z,T)$ tels que :

$$X^2 + Z^2 = Y^2 + T^2.$$

4) On sait que $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E = 4$. Donc $\dim F^{\perp} = 4 - 2 = 2$.

Posons $e_1 = (1,0,0,0)$ et $e_2 = (1,1,2,0)$.

Cherchons un vecteur $x = (a,b,c,d)$ dans $F^{\perp}$.

On doit avoir $b(x,e_1) = 0$ et $b(x,e_2) = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 16a - 8c = 0 \\ 16a - 16b - 10c - 8c - 16a + 8c + 16b + 2d = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 16a - 8c = 0 \\ -10c + 2d = 0. \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = 2a \\ d = 10a \end{cases}, (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Une base de $F^{\perp}$ est donc :

$$\left\{ e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} ; e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 7

1) La méthode de réduction en carrés de Gauss donne successivement :

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3 \\ &= (x_1 - 2x_3)^2 - 4x_3^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - 2x_3)^2 - (x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2) \\ &= (x_1 - 2x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 - 4x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 - 3x_3^2. \end{aligned}$$

- Recherche de la base orthogonale pour q

Posons

$$\begin{cases} X = x_1 - 2x_3 \\ Y = x_2 + x_3 \\ Z = \sqrt{3}x_3. \end{cases}$$

Inversons ce système :

$$\begin{cases} x_1 = X + \dfrac{2Z}{\sqrt{3}} \\ x_2 = Y - \dfrac{Z}{\sqrt{3}} \\ x_3 = \dfrac{Z}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Posons maintenant P la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

On définit la base orthogonale pour q par :

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}.$$

2) La méthode de réduction en carrés de Gauss donne :

$$\begin{aligned} q(x) &= 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 - 4x_1x_3 + 2x_1x_2 \\ &= 4\left(x_1^2 - x_1x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2\right) + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 \\ &= 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2 + x_2x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 \\ &= 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{15}{4}x_2^2 - 11x_2x_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{15}{4}x_2^2 - 11x_2x_3 \\
&= 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x_2^2 - \frac{44}{15}x_2x_3\right) \\
&= 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x_2 - \frac{22}{15}x_3\right)^2 - \frac{121}{15}x_3^2.
\end{aligned}
$$

- Recherche de la base orthogonale pour q

Posons

$$
\begin{cases}
X = 2x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - x_3 \\
Y = \dfrac{\sqrt{15}}{2}x_2 - \dfrac{11}{\sqrt{15}}x_3 \\
Z = \dfrac{11}{\sqrt{15}}x_3.
\end{cases}
$$

Inversons ce système :

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{2\sqrt{15}}Y - \dfrac{2}{11\sqrt{15}}Z \\
x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{15}}Y + \dfrac{2}{\sqrt{15}}Z \\
x_3 = \dfrac{\sqrt{15}}{11}Z.
\end{cases}
$$

Posons maintenant P la matrice suivante :

$$
P = \begin{pmatrix}
\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2\sqrt{15}} & -\dfrac{2}{11\sqrt{15}} \\
0 & \dfrac{2}{\sqrt{15}} & \dfrac{2}{\sqrt{15}} \\
0 & 0 & \dfrac{\sqrt{15}}{11}
\end{pmatrix}.
$$

On définit la base orthogonale pour q par :

$$
\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{15}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{15}} \\ 0 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{11\sqrt{15}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{15}} \\ \dfrac{\sqrt{15}}{11} \end{pmatrix} \right\}.
$$

3) La méthode de réduction en carrés de Gauss donne:

$$\begin{aligned} q(x) &= 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= x_1(3x_2 + 2x_3) + x_2x_3 \\ &= x_2(3x_1 + x_3) + 2x_2x_3. \end{aligned}$$

On pose:

$$\begin{cases} u_1 = 3x_2 + 2x_3 \\ u_2 = 3x_1 + x_3. \end{cases}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{3}u_1u_2 - \frac{2}{3}x_3^2 \\ &= \frac{1}{12}(3x_1 + 3x_2 + 3x_3)^2 - \frac{1}{12}(3x_1 + 3x_2 - x_3)^2 - \frac{2}{3}x_3^2 \\ &= \frac{3}{4}(x_1 + x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{12}(3x_1 - 3x_2 - x_3)^2 - \frac{2}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

- Recherche de la base orthogonale pour q:

Posons

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(x_1 + x_2 + x_3) \\ Y = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(3x_1 - 3x_2 - x_3) \\ Z = \sqrt{\dfrac{2}{3}}x_3. \end{cases}$$

Inversons ce système:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}X + \dfrac{\sqrt{3}}{3}Y - \dfrac{\sqrt{6}}{6}Z \\ x_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}X - \dfrac{\sqrt{3}}{3}Y - \dfrac{\sqrt{6}}{3}Z \\ x_3 = Z\sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{cases}$$

Posons maintenant P la matrice suivante:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{-\sqrt{6}}{6} \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3} & \dfrac{-\sqrt{3}}{3} & \dfrac{-\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

On définit la base orthogonale pour q par :

$$\left\{v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 8

1) Utilisons la méthode de réduction en carrés de Gauss :

On a :

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= x^2 - 2yz - xz \\ &= \left(x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}z^2 - 2yz \\ &= \left(x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}\left(z^2 + 8yz\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}\left[(z+4y)^2 - 16y^2\right] \\ &= \left(x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}(z+4y)^2 + 4y^2 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \left(2y + \frac{1}{2}z\right)^2 + (2y)^2. \end{aligned}$$

On en déduit directement que :

$$\begin{cases} sign(q) = (2,1), \\ rg(q) = 3. \end{cases}$$

- Recherche de la base orthogonale

  On pose :

$$\begin{cases} X = x - \frac{1}{2}z \\ Y = 2y + \frac{1}{2}z \\ Z = 2y. \end{cases}$$

  Inversons ce système linéaire :

$$\begin{cases} x = X + Y - Z \\ y = \frac{Z}{2} \\ z = 2Y - 2Z. \end{cases}$$

Posons P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

La base orthonormale est donnée par :

$$\left\{ e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; e_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

2) Une base de $(\mathcal{P}_t)$ est donnée par :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Cherchons un vecteur isotrope pour q sous la forme :

$$u = \begin{pmatrix} -2\lambda - t\mu \\ 3\lambda \\ 3\mu \end{pmatrix}.$$

On doit avoir :

$$q(u) = (-2\lambda - t\mu)^2 - 2(3\lambda)(3\mu) - (-2\lambda - t\mu)(3\mu) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$q(u) = 4\lambda^2 + (4t - 12)\lambda\mu + \left(t^2 + 3t\right)\mu^2 = 0.$$

Utilisons la méthode de réduction en carrés de Gauss :

$$\begin{aligned}
4\lambda^2 + (4t-12)\lambda\mu + \left(t^2+3t\right)\mu^2 &= 4\left[\lambda^2 + (t-3)\lambda\mu\right] + \left(t^2+3t\right)\mu^2 \\
&= 4\left[\left(\lambda + \frac{t-3}{2}\mu\right)^2 - \frac{(t-3)^2}{4}\mu^2\right] + (t^2+3t)\mu^2 \\
&= 4\left(\lambda + \frac{t-3}{2}\mu\right)^2 - (t-3)^2\mu^2 + (t^2+3t)\mu^2 \\
&= 4\left(\lambda + \frac{t-3}{2}\mu\right)^2 - \left(t^2 - 6t + 9\right)\mu^2 + (t^2+3t)\mu^2 \\
&= 4\left(\lambda + \frac{t-3}{2}\mu\right)^2 + (9t-9)\mu^2 \\
&= \left(2\lambda + (t-3)\mu\right)^2 + 9(t-1)\mu^2 = 0.
\end{aligned}$$

Trois cas se présentent :

i) 1er cas : $t-1>0$.

Dans ce cas, la forme quadratique en λ et μ précédente est la somme de deux carrés. L'unique solution de :
$$4\lambda^2+(4t-12)\lambda\mu+\left(t^2+3t\right)\mu^2=0$$
est $\lambda=\mu=0$. Il n'y a donc pas de vecteurs isotropes non nul de q dans $(\mathcal{P}_t)$.

ii) 2e cas : $t-1=0$.

Dans ce cas, une solution non nulle de :
$$4\lambda^2+(4t-12)\lambda\mu+\left(t^2+3t\right)\mu^2=0$$
est, par exemple, $\lambda=\mu=1$. Il y a au moins un vecteur isotrope non nul de q dans $(\mathcal{P}_t)$.

iii) 3e cas : $t-1<0$.

Dans ce cas, l'équation :
$$4\lambda^2+(4t-12)\lambda\mu+\left(t^2+3t\right)\mu^2=0$$
admet au moins une solution non nulle, par exemple : $\mu=1$ et $\lambda=\dfrac{3-t+3\sqrt{|t-3|}}{2}$. Il y a au moins un vecteur isotrope non nul de q dans $(\mathcal{P}_t)$.

- Recherche des valeurs de t pour lesquelles la restriction de q à $(\mathcal{P}_t)$ est dégénérée.

  La forme bilinéaire associée à q est donnée par :
$$B((x,y,z),(x',y',z'))=xx'-yz'-y'z-\frac{1}{2}xz'-\frac{1}{2}x'z.$$

  On recherche $\ker B$:

  Soit $Y\in\ker B$. On cherche Y sous la forme :
$$Y=\begin{pmatrix}-2\lambda-t\mu\\3\lambda\\3\mu\end{pmatrix}.$$

  Prenons le vecteur $X=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$:

  On a alors :
$$B(X,Y)=-2(-2\lambda-t\mu)-9\mu-\frac{1}{2}\times(-2)\times3\mu=0,$$

c'est-à-dire:

$$B(X,Y) = 4\lambda + (2t-6)\mu = 0.$$

Prenons maintenant $X = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$:

On a alors:

$$B(X,Y) = -t \times (-2\lambda - t\mu) - 9\lambda + \frac{1}{2} \times t \times 3\mu - \frac{3}{2} \times (2\lambda + t\mu) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$B(X,Y) = (2t-6)\lambda + \left(t^2 + 3t\right)\mu = 0.$$

On en déduit le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 4\lambda + (2t-6)\mu = 0 \\ (2t-6)\lambda + \left(t^2 + 3t\right)\mu = 0. \end{cases}$$

Ce système admet une solution non nulle si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2t-6 \\ 2t-6 & t^2+3t \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire, si et seulement si:

$$t = 1.$$

Chapitre 6

Application des formes quadratiques à l'étude des coniques

1. Rappels de cours

a) Définitions

On appelle conique toute courbe d'équation implicite :

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0.$$

▸ Classification

A partir de l'équation précédente, on construit les matrices symétriques suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Suivant les valeurs de $\det M$ et $\det A$, on déduit la nature de la conique :

det A		$=0$	$\neq 0$
La conique est dite :		impropre	propre
Nature de la conique	det $M>0$	un point	une ellipse
	det $M=0$	une droite	une parabole
	det $M<0$	la réunion de deux droites	une hyperbole

Nous laissons de côté les coniques impropres pour nous intéresser aux coniques propres. Parmi ces dernières, nous distinguons deux sortes de coniques : les coniques à centre (ellipse et hyperbole) et la parabole.

b) Plan d'étude d'une conique à centre

▶ Recherche du centre de symétrie

En gardant les mêmes notations que celles figurant dans la définition, le centre $I(x_0, y_0)$ de la conique est donnée par la résolution du système linéaire suivant:

$$M \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

▶ Recherche des axes de symétrie

Notons v_1 et v_2 les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice M.

Soit $I(x_0, y_0)$ le centre de symétrie de la conique.

Prenons P un point de la conique de coordonnées $P(X,Y)$ dans le repère (I, v_1, v_2), alors l'équation de la conique s'écrit plus simplement dans ce nouveau repère:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + f(x_0, y_0) = 0.$$

Cette dernière équation s'appelle l'équation réduite de la conique et peut se mettre sous la forme plus simple:

$$\begin{cases} \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 & \text{pour une ellipse,} \\ \dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 & \text{pour une hyperbole.} \end{cases}$$

c) Étude de la parabole

Deux réductions en carrés de Gauss successives permettent de trouver un changement de variables conduisant à l'équation réduite de la parabole, à savoir:

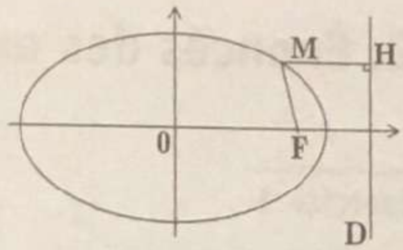
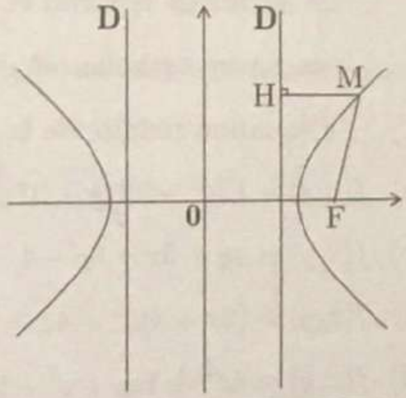
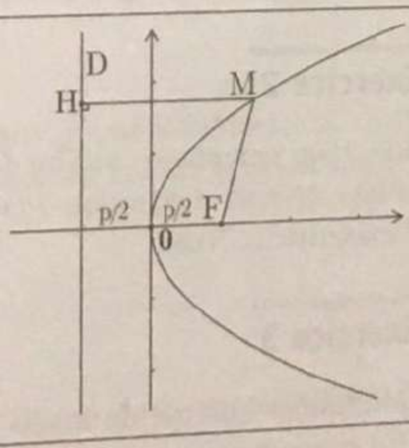
$$Y^2 = 2pX.$$

d) Définition des coniques par foyer-directrice

Soit un point F et une droite $\mathcal{D}$ (ne passant pas par F) du plan euclidien, et soit e un réel strictement positif. On appelle conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan vérifiant:

$$\frac{d(M,F)}{d(M,\mathcal{D})} = e.$$

Le tableau ci-après donne la nature de l'ensemble des points M suivant les valeurs de e.

Nature de la conique	Équation réduite / Excentricité / Équation de la directrice	Foyers / Sommets / Définition bifocale	Représentation graphique
Ellipse	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$	$F(c,0)$; $F'(-c,0)$	
	$e<1$ avec $e=\frac{c}{a}$ où $a^2=b^2+c^2$	$A(a,0)$; $A'(-a,0)$; $B(0,b)$; $B'(0,-b)$	
	$x=\frac{a^2}{c}$; $x=-\frac{a^2}{c}$	$MF+MF'=2a$	
Hyper-bole	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$	$F(c,0)$; $F'(-c,0)$	
	$e<1$ avec $e=\frac{c}{a}$ où $c^2=a^2+b^2$	$A(a,0)$; $A'(-a,0)$	
	$x=\frac{a^2}{c}$; $x=-\frac{a^2}{c}$	$\lvert MF-MF'\rvert=2a$	
Parabole	$Y^2=2pX$	$F(\frac{p}{2},0)$	
	$e=1$	$A(0,0)$	
	$y=\frac{-p}{2}$	$\varnothing$	

e) Distance d'un point à une droite

Soit D une droite d'équation cartésienne :

$$ax+by+c=0,$$

et M un point de coordonnées $M(x_0,y_0)$.

Alors, la distance $d(M,\mathcal{D})$ du point M à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

Pour chacune des coniques suivantes, préciser :

- la nature de la conique,
- un repère orthonormé dans lequel la conique admet une équation réduite,
- l'équation réduite de la conique.

a) $f(x,y) = 13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$

b) $f(x,y) = xy + 3x + 5y - 4 = 0$

c) $f(x,y) = (2x + 3y)^2 + 4x + 5y - 5 = 0$

d) $f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0.$

Exercice 2

Soit P un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients réels. Montrer que l'ensemble des points $M(x,y)$ d'équation $P(x) - P(y) = 0$ est la réunion d'une droite et d'une conique d'excentricité fixée.

Exercice 3

Déterminer l'ellipse de foyers $F(1,1)$ et $F'(-1,1)$ dont un des sommets est $A(2,1)$. (Un sommet est l'un des quatre points d'intersection de l'ellipse avec ses axes de symétrie).

Exercice 4

Trouver dans un repère orthonormé les équations cartésiennes des paraboles tangentes à (Ox) en $A(2,0)$ et à (Oy) en $B(0,1)$.

3. Corrigés des exercices

Exercice 1

a) Soit $\mathcal{C}_1$ la conique d'équation :

$$f(x,y) = 13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0.$$

- Nature de la conique $\mathcal{C}_1$

Posons M et A les matrices symétriques définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 13 & -16 & -1 \\ -16 & 37 & 7 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

$\det A = -1125 \neq 0$ et $\det M = 225 > 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_1$ est une ellipse.

- Recherche du centre de l'ellipse

Soit $I(x_0, y_0)$ le centre de l'ellipse. Alors (x_0, y_0) est solution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La résolution de ce système linéaire donne :

$$I\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right).$$

De plus, $f\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right) = -7.$

- Recherche des axes de symétrie

La diagonalisation de la matrice A donne deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 45$ et $\lambda_2 = 5$. Les vecteurs propres, unitaires, associés à ces valeurs propres sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

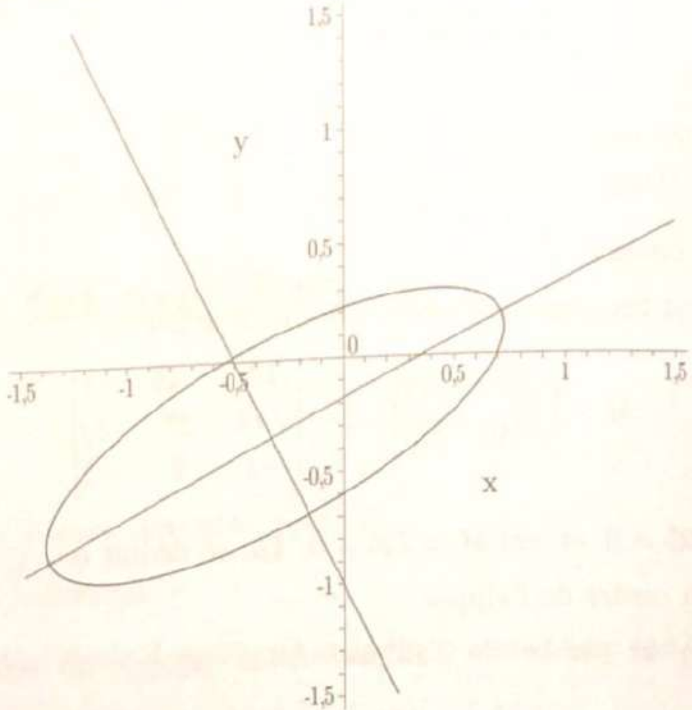
Le repère (I, v_1, v_2) fournit une base orthonormée (v_1, v_2) dans lequel l'ellipse $\mathcal{C}_1$ a pour équation réduite :

$$45X^2 + 5Y^2 - 7 = 0,$$

que l'on écrit plus simplement :

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{45}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = 1.$$

Représentation graphique de la conique $\mathcal{C}_1$:



b) Soit $\mathcal{C}_2$ la conique d'équation :

$$f(x,y) = xy + 3x + 5y - 4 = 0.$$

- Nature de la conique $\mathcal{C}_2$

  Posons M et A les matrices symétriques définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

  $\det A = \dfrac{-11}{4} \neq 0$ et $\det M = \dfrac{-1}{4} < 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_2$ est une hyperbole.

- Recherche du centre de l'hyperbole

  Soit $I(x_0, y_0)$ le centre de l'hyperbole. Alors (x_0, y_0) est solution du système linéaire:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix}.$$

La résolution de ce système linéaire donne :

$$I(-5,-3).$$

De plus, $f\left(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right)=11.$

- Recherche des axes de symétrie

La diagonalisation de la matrice A donne deux valeurs propres distinctes $\lambda_1=\frac{-1}{2}$ et $\lambda_2=\frac{1}{2}$. Les vecteurs propres, unitaires, associés à ces valeurs propres sont :

$$v_1=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

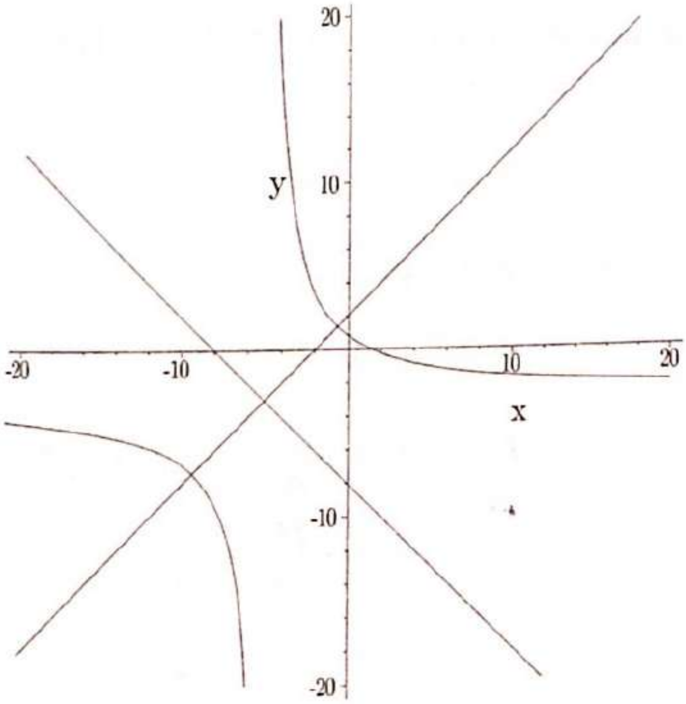
Le repère (I,v_1,v_2) fournit une base orthonormée (v_1,v_2) dans lequel l'ellipse $\mathcal{C}_2$ a pour équation réduite :

$$\frac{-1}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2+11=0,$$

que l'on écrit plus simplement :

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{22}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{22}\right)^2}=1.$$

Représentation graphique de la conique $\mathcal{C}$:



c) Soit $\mathcal{C}_3$ la conique d'équation :

$$f(x,y) = (2x+3y)^2 + 4x + 5y - 5 = 0.$$

- Nature de la conique $\mathcal{C}_3$

Posons M et A les matrices symétriques définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & -5 \end{pmatrix}.$$

$\det A = -1 \neq 0$ et $\det M = 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_3$ est une parabole.

- Recherche du sommet et de l'axe de la parabole

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} Z = 2x + 3y \\ T = 3x - 2y, \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{13}Z + \dfrac{3}{13}T \\ y = \dfrac{3}{13}Z - \dfrac{2}{13}T. \end{cases}$$

Avec ce changement de variables, l'équation de la conique devient :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2x+3y)^2 + 4x + 5y - 5 = 0 \\ &= Z^2 + 4\left(\frac{2}{13}Z + \frac{3}{13}T\right) + 5\left(\frac{3}{13}Z - \frac{2}{13}T\right) - 5 = 0 \\ &= Z^2 + \frac{23}{13}Z + \frac{2}{13}T - 5 = 0. \end{aligned}$$

Appliquons la méthode de réduction en carrés de Gauss à l'équation trouvée précédemment :

$$\begin{aligned} Z^2 + \frac{23}{13}Z + \frac{2}{13}T - 5 &= \left(Z + \frac{23}{26}\right)^2 - \left(\frac{23}{26}\right)^2 + \frac{2}{13}T - 5 \\ &= \left(Z + \frac{23}{26}\right)^2 + \frac{2}{13}T - \frac{3909}{676} \\ &= \left(Z + \frac{23}{26}\right)^2 + \frac{2}{13}\left(T - \frac{3909}{104}\right) = 0. \end{aligned}$$

Effectuons le nouveau changement de variables :

$$\begin{cases} X = Z + \dfrac{23}{26} \\ Y = T - \dfrac{3909}{104}, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X = \dfrac{23}{26} + 2x + 3y \\ Y = -\dfrac{3909}{104} + 3x - 2y. \end{cases}$$

Avec ce changement de variables, l'équation de la conique devient :

$$X^2 = 2pY,$$

où

$$p = \frac{1}{13}.$$

- Obtention du nouveau repère orthonormé

Ecrivons x et y en fonction de X et Y :

$$\begin{cases} x = \dfrac{11543}{1352} + \dfrac{2}{13}X + \dfrac{3}{13}Y \\ y = -\dfrac{4047}{676} + \dfrac{3}{13}X - \dfrac{2}{13}Y. \end{cases}$$

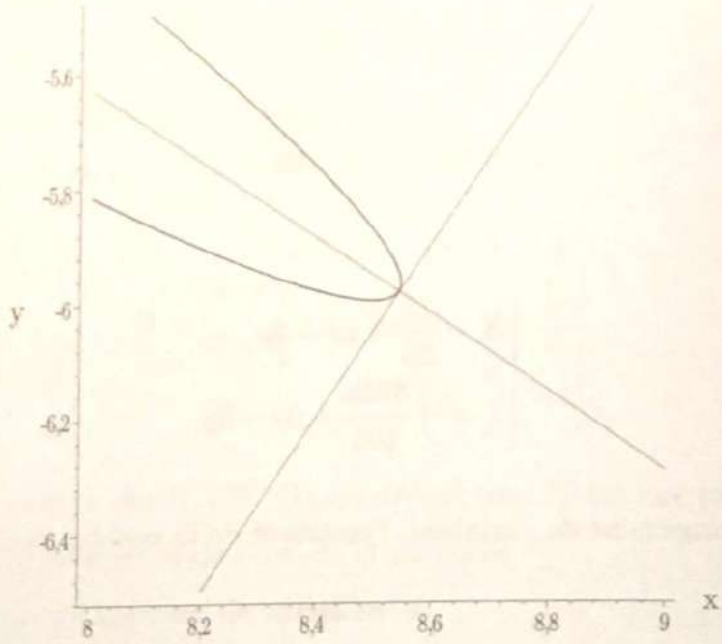
Ainsi, le nouveau repère (O, e_1, e_2) dans lequel l'équation de la parabole est :

$$X^2 = \frac{2}{13}Y,$$

est donnée par :

$$O\left(\frac{11543}{1352}, -\frac{4047}{676}\right) \; ; \; e_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{13} \\ \dfrac{3}{13} \end{pmatrix} \; ; \; e_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{13} \\ -\dfrac{2}{13} \end{pmatrix}.$$

Représentation graphique de la conique $\mathcal{C}_3$:



d) Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation :

$$f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0.$$

- Nature de la conique $\mathcal{C}_4$

  Posons M et A les matrices symétriques définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

  $\det A = -25 \neq 0$ et $\det M = 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_4$ est une parabole.

- Recherche du sommet et de l'axe de la parabole

  Appliquons la méthode de réduction en carrés de Gauss :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y + 1 \\ &= (2x+y)^2 - 2x - 6y + 1 = 0. \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variables :

$$\begin{cases} Z = 2x + y \\ T = -x + 2y, \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}Z - \frac{1}{5}T \\ y = \frac{1}{5}Z + \frac{2}{5}T. \end{cases}$$

Avec ce changement de variables, l'équation de la conique devient:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2x+y)^2 - 2x - 6y + 1 = 0 \\ &= Z^2 - 2\left(\frac{2}{5}Z - \frac{1}{5}T\right) - 6\left(\frac{1}{5}Z + \frac{2}{5}T\right) + 1 = 0 \\ &= Z^2 - 2Z - 2T + 1 = 0. \end{aligned}$$

Appliquons la méthode de la réduction de Gauss à l'équation trouvée précédemment:

$$\begin{aligned} Z^2 - 2Z - 2T + 1 &= (Z-1)^2 - 1 - 2T + 1 \\ &= (Z-1)^2 - 2T = 0. \end{aligned}$$

Effectuons le nouveau changement de variables:

$$\begin{cases} X = Z - 1 \\ Y = T, \end{cases}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} X = -1 + 2x + y \\ Y = -x + 2y. \end{cases}$$

Avec ce changement de variables, l'équation de la conique devient:

$$X^2 = 2pY,$$

où

$$p = 1.$$

- Obtention du nouveau repère orthonormé

Ecrivons x et y en fonction de X et Y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5}X - \dfrac{1}{5}Y \\ y = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}X + \dfrac{2}{5}Y. \end{cases}$$

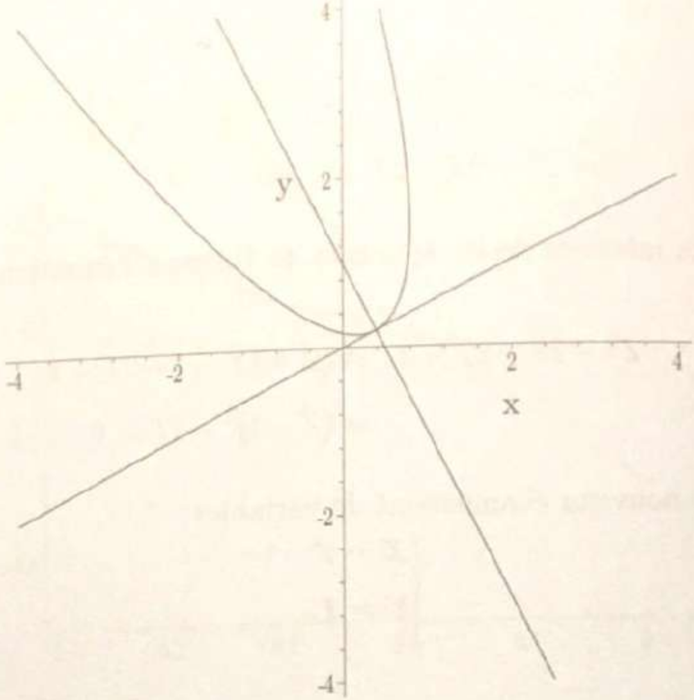
Ainsi, le nouveau repère (O, e_1, e_2) dans lequel l'équation de la parabole est:

$$X^2 = 2Y,$$

est donnée par:

$$O\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right);\ e_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{5} \end{pmatrix};\ e_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Représentation graphique de la conique C_4 :



Exercice 2

Soit P un polynôme unitaire de degré 3, alors P s'écrit :

$$P(X) = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma.$$

L'équation $P(x) - P(y) = 0$ s'écrit alors:

$$\left(x^3 - y^3\right) + \alpha\left(x^2 - y^2\right) + \beta(x - y) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$(x - y) \times \left[x^2 + xy + y^2 + \alpha x + \alpha y + \beta\right] = 0.$$

On en déduit que: $x - y = 0$ ou $x^2 + xy + y^2 + \alpha x + \alpha y + \beta = 0$. Ainsi, l'ensemble des points M de coordonnées $M(x, y)$ est bien la réunion d'une droite d'équation $x - y = 0$ et d'une conique, notée $\mathcal{C}$, d'équation $x^2 + xy + y^2 + \alpha x + \alpha y + \beta = 0$ dont nous allons faire l'étude dans ce qui suit.

- Nature de la conique $\mathcal{C}$

  Posons M et A les matrices symétriques définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \beta \end{pmatrix}.$$

$\det A = \dfrac{3\beta - \alpha^2}{4}$ et $\det M = \dfrac{3}{2} > 0.$

Deux cas se présentent alors, suivant que $3\beta - \alpha^2 = 0$ ou que $3\beta - \alpha^2 \neq 0.$

i) 1er cas : $3\beta - \alpha^2 = 0.$

Dans ce cas, la conique $\mathcal{C}$ est dégénérée.

Comme $\beta = \dfrac{\alpha^2}{3}$, l'équation de la conique $\mathcal{C}$ devient :

$$x^2 + xy + y^2 + \alpha x + \alpha y + \frac{\alpha^2}{3} = 0.$$

La méthode de réduction en carrés de Gauss donne :

$$x^2 + xy + y^2 + \alpha x + \alpha y + \frac{\alpha^2}{3} = \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\alpha\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{\alpha}{3}\right)^2 = 0.$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}\alpha = 0 \\ y + \dfrac{\alpha}{3} = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-\alpha}{3} \\ y = \dfrac{-\alpha}{3}. \end{cases}$$

La conique $\mathcal{C}$ est donc réduite au point I de coordonnées $I\left(\dfrac{-\alpha}{3}, \dfrac{-\alpha}{3}\right)$.

ii) 2e cas : $3\beta - \alpha^2 \neq 0.$

Dans ce cas, comme $\det M \neq 0$ et que $\det A > 0$, la conique $\mathcal{C}$ est une ellipse.

- Recherche du centre de l'ellipse

Soit $I(x_0, y_0)$ le centre de l'ellipse. Alors (x_0, y_0) est solution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{2} \\ \dfrac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

La résolution de ce système linéaire donne :

$$I\left(\frac{-\alpha}{3}, \frac{-\alpha}{3}\right).$$

De plus, $f\left(\dfrac{-\alpha}{3}, \dfrac{-\alpha}{3}\right) = \beta - \dfrac{\alpha^2}{3}.$

- Recherche des axes de symétrie

La diagonalisation de la matrice A donne deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. Les vecteurs propres, unitaires, associés à ces valeurs propres sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

On en déduit le repère (I, v_1, v_2) fournit une base orthonormée (v_1, v_2) dans lequel l'ellipse $\mathcal{C}$ a pour équation réduite :

$$\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{3}\right) = 0. \ (*)$$

A nouveau, deux sous-cas se présentent, suivant que $\beta - \frac{\alpha^2}{3} > 0$ ou que $\beta - \frac{\alpha^2}{3} < 0$.

i) Si $\beta - \frac{\alpha^2}{3} < 0$, alors l'équation (*) s'écrit :

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{2(\alpha^2 - 3\beta)}{3}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{2(\alpha^2 - 3\beta)}{9}}\right)^2} = 1.$$

Posons :

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{2(\alpha^2 - 3\beta)}{3}} \\ b = \sqrt{\frac{2(\alpha^2 - 3\beta)}{9}}. \end{cases}$$

On a alors :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{4(\alpha^2 - 3\beta)}{9}}$$

La conique $\mathcal{C}$ est donc une ellipse d'excentricité :

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

ii) Si $\beta - \frac{\alpha^2}{3} > 0$, alors la conique $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide.

Exercice 3

Le centre O de cette ellipse est le milieu du segment $[FF']$. On a donc $O(0,1)$ et $c = OF = 1$. De plus, le sommet A se situant sur l'axe focal (FF'), on a $a = OA = 2$.
On en déduit la longueur du demi petit-axe de cette ellipse : $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$.
Cette ellipse a donc pour excentricité :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

et l'équation d'une de ses directrices $\mathcal{D}$ est :

$$\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c} = 4.$$

Prenons un point $M(x,y)$ sur cette ellipse. Alors le point M vérifie :

$$d(M,F) = e \times d(M,\mathcal{D}).$$

Vu que

$$[d(M,F)]^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

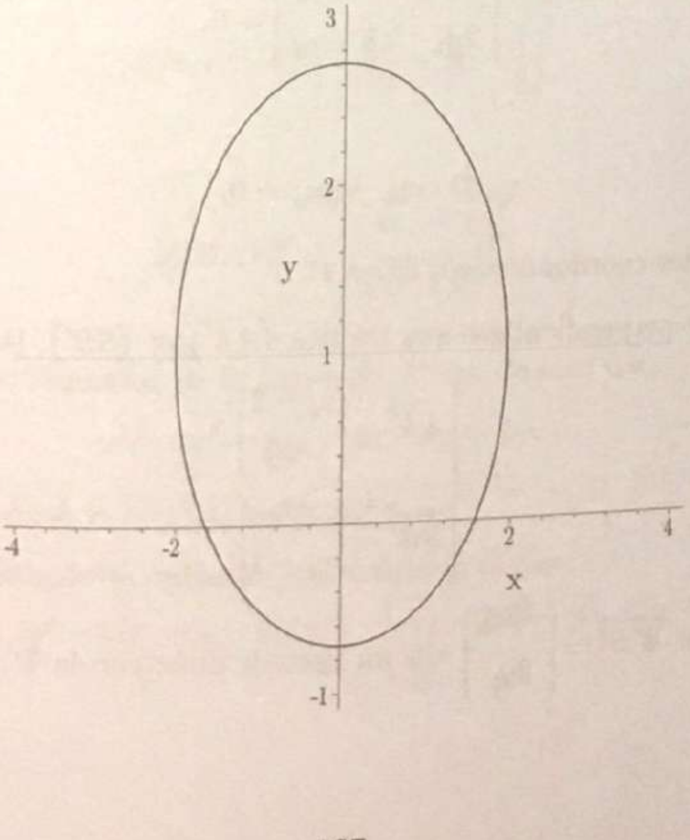
et que

$$[d(M,\mathcal{D})]^2 = (x-4)^2,$$

on en déduit que l'équation de cette ellipse est :

$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0.$$

La représentation graphique de cette ellipse est donnée par :



Exercice 4

Utilisons dans cet exercice une propriété importante des tangentes à une parabole:

Considérons une parabole p de foyer F, M un point de p et T la tangente en M à p. Notons H le projeté de M sur la directrice de p. Alors la tangente T est la médiatrice du segment $[FM]$ ou encore, une autre façon de caractériser T est de dire que H est le symétrique de F par rapport à T.

Après ce rappel, retournons à notre exercice. Notons $\mathcal{P}$ la parabole cherchée et $\mathcal{D}$ sa directrice. Notons (x_0, y_0) les coordonnées du foyer F de la parabole $\mathcal{P}$. Posons enfin A', le projeté orthogonal de A sur la directrice $\mathcal{D}$ et B', le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$.

Puisque (Ox) est la tangente en A à $\mathcal{P}$, alors le projeté de A sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire A', est le symétrique du foyer F par rapport à (Ox). Ainsi, comme F a pour coordonnées (x_0, y_0), alors son symétrique A' par rapport à (Ox) a pour coordonnées $A'(x_0, -y_0)$. De la même façon, comme B' est le symétrique de F par rapport à (Oy), B' a pour coordonnées $B'(-x_0, y_0)$.

- Équation de la directrice $\mathcal{D}$:

  La directrice $\mathcal{D}$ passe par le point $A'(x_0, -y_0)$ et le point $B'(-x_0, y_0)$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est donc, par exemple, $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$.

  Ainsi, l'équation de $\mathcal{D}$ est donnée par:

$$\begin{vmatrix} -2x_0 & x - x_0 \\ 2y_0 & y + y_0 \end{vmatrix} = 0,$$

  c'est-à-dire:

$$\mathcal{D} : xy_0 + yx_0 = 0.$$

- Détermination des coordonnées du foyer F

  La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire aux droites (AA') et (BB'). De plus,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} x_0 - 2 \\ -y_0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ y_0 - 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

  et rappelons que $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B'} = 0$ et que $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{A'B'} = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 = 0 & (1) \\ x_0^2 + y_0^2 - y_0 = 0. & (2) \end{cases}$$

En calculant (1)+(2), on obtient :

$$y_0 = 2x_0.$$

En remplaçant ce résultat dans (1), on obtient :

$$5x_0^2 - 2x_0 = 0.$$

On en déduit que le point F a pour coordonnées $(0,0)$ ou bien F a pour coordonnées $\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$.

La solution $(0, 0)$ étant exclue (car ce point est situé sur les tangentes), le point F a finalement pour coordonnées $\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$ et la droite $\mathcal{D}$ a pour équation :

$$\mathcal{D} : 4x + 2y = 0.$$

- Équation de la parabole $\mathcal{P}$

Soit $M(x,y) \in \mathcal{P}$. Alors le point M vérifie la relation :

$$[d(M,F)]^2 = e^2 \times [d(M,\mathcal{D})]^2,$$

où l'excentricité e vérifie $e = 1$ dans le cas d'une parabole.

Par ailleurs :

$$[d(M,F)]^2 = \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2,$$

et :

$$[d(M,\mathcal{D})]^2 = \left[\frac{|4x + 2y|}{\sqrt{4^2 + 2^2}}\right]^2.$$

On en déduit que l'équation de la parabole $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x - 8y + 4 = 0.$$

- Recherche du sommet et de l'axe de la parabole

Appliquons la méthode de réduction en carrés de Gauss :

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x - 8y + 4 &= (x - 2y)^2 - 4x - 8y + 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variables :

$$\begin{cases} Z = x - 2y \\ T = 2x + y, \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}Z + \dfrac{2}{5}T \\ y = \dfrac{-2}{5}Z + \dfrac{1}{5}T. \end{cases}$$

Avec ce changement de variables, l'équation de la conique devient :

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x - 8y + 4 &= (x-2y)^2 - 4x - 8y + 4 = 0 \\ &= Z^2 - 4\left(\frac{1}{5}Z + \frac{2}{5}T\right) - 8\left(\frac{-2}{5}Z + \frac{1}{5}T\right) + 4 = 0 \\ &= Z^2 + \frac{12}{5}Z - \frac{16}{5}T + 4 = 0. \end{aligned}$$

Appliquons à nouveau la méthode de réduction en carrés de Gauss à l'équation trouvée précédemment :

$$\begin{aligned} Z^2 + \frac{12}{5}Z - \frac{16}{5}T + 4 &= \left(Z + \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{36}{25} - \frac{16}{5}T + 4 \\ &= \left(Z + \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{16}{5}\left(T - \frac{4}{5}\right) = 0. \end{aligned}$$

Effectuons le nouveau changement de variables :

$$\begin{cases} X = Z + \dfrac{6}{5} \\ Y = T - \dfrac{4}{5}, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X = \dfrac{6}{5} + x - 2y \\ Y = \dfrac{-4}{5} + 2x + y. \end{cases}$$

Avec ce changement de variables, l'équation de la conique devient :

$$X^2 = 2pY,$$

où

$$p = \frac{8}{5}.$$

- Obtention du nouveau repère orthonormé

Ecrivons x et y en fonction de X et Y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{25} + \dfrac{1}{5}X + \dfrac{2}{5}Y \\ y = \dfrac{16}{25} - \dfrac{2}{5}X + \dfrac{1}{5}Y. \end{cases}$$

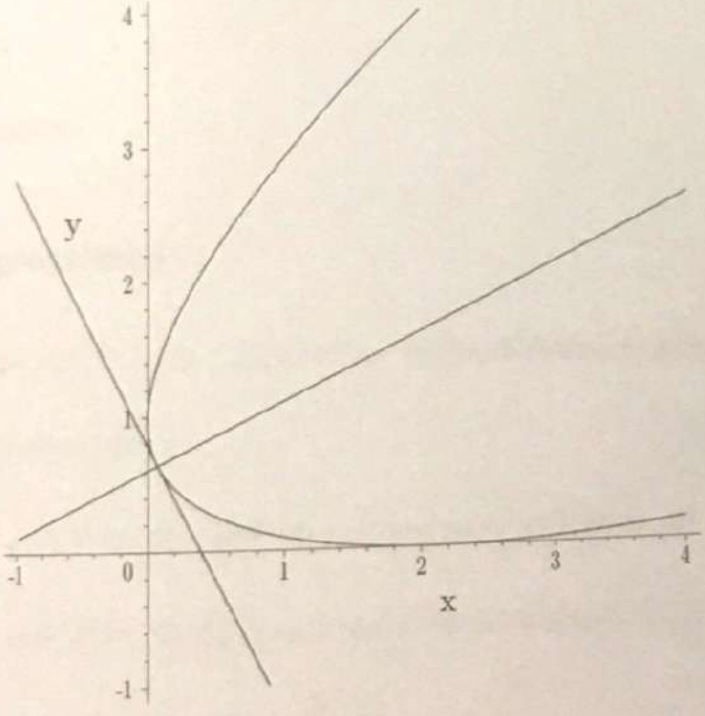
Ainsi, le nouveau repère (O, e_1, e_2) dans lequel l'équation de la parabole est :

$$X^2 = \frac{16}{5}Y,$$

est donnée par :

$$O\left(\frac{2}{25}, \frac{16}{25}\right); e_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{-2}{5} \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Représentation graphique de la parabole $\mathcal{P}$:



Scanned by CamScanner

Chapitre 7

Produit scalaire euclidien

1. Rappels de cours

Soit E un espace euclidien.

a) Définitions et propriétés

- Un **produit scalaire** sur E, noté $\langle .,. \rangle$, est une **forme bilinéaire**, **symétrique**, vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) $\forall x \in E,\ \langle x,x \rangle \geq 0$, (On dit alors que cette forme bilinéaire est **positive**)

ii) $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (On dit alors que cette forme bilinéaire est **définie**)

- On appelle **norme de x** le réel : $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$.

▸ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient u et v deux vecteurs de E. Alors :

$$\left| \langle u,v \rangle \right| \leq \sqrt{\langle u,u \rangle}.\sqrt{\langle v,v \rangle}.$$ ou $|\langle u,v \rangle|^2 \leq \langle u,u \rangle \langle v,v \rangle$

b) Orthogonalité

1) Orthonormalisation de Schmidt

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt consiste à construire une base orthonormée $\{e'_1,...e'_p\}$ à partir d'une base quelconque $\{e_1,...e_p\}$, selon la technique suivante.

$$\begin{array}{lcll}
e_1 & \to & \tilde{e}_1 = e_1 & \to \quad e'_1 = \dfrac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|} \\
e_2 & \to & \begin{array}{l}\tilde{e}_2 = e_2 + \lambda e'_1 \\ \text{où} \quad \lambda = -\langle e_2, e'_1\rangle\end{array} & \to \quad e'_2 = \dfrac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} \\
e_3 & \to & \begin{array}{l}\tilde{e}_3 = e_3 + \lambda e'_1 + \mu e'_2 \\ \text{où} \quad \lambda = -\langle e_3, e'_1\rangle \text{ et } \mu = -\langle e_3, e'_2\rangle\end{array} & \to \quad e'_3 = \dfrac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|} \\
\vdots & & & \\
e_k & \to & \tilde{e}_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e'_i \text{où} \quad \forall i, \lambda_i = -\langle e_k, e'_i\rangle & \to \quad e'_k = \dfrac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}
\end{array}$$

La base $\{e'_1,...,e'_p\}$ ainsi obtenue est une base orthonomée.

2) Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

- Soit F un sous-espace vectoriel. On appelle orthogonal de F, le sous-espace vectoriel de E, noté $F^\perp$, tel que:

$$F^\perp = \{x \in F \ / \ \forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Dans la pratique, pour déterminer $F^\perp$, on donne successivement comme valeurs à y, les vecteurs d'une base de F.

▶ Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel. Alors, on a la décomposition suivante:

$$E = F \oplus F^\perp.$$

c) Produit mixte, produit vectoriel

Dans cette partie on se place dans $E = \mathbb{R}^3$.

1) Définitions

- Le produit mixte des vecteurs u, v, w est le réel, noté $[u, v, w]$, défini par:

$$[u, v, w] = \det(u, v, w).$$

- Le produit vectoriel de deux vecteurs u et v est l'unique vecteur, noté $u \wedge v$, tel que:

$$\forall w \in E, \det(u, v, w) = \langle u \wedge v, w\rangle.$$

2) Propriétés du produit vectoriel

- Découlant directement de la définition, on a :

i) $\forall u \in E,\ u \wedge u = 0$.

ii) Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal aux vecteurs u et v. (En particulier, si u et v ne sont pas colinéaires, alors $\{u, v, u \wedge v\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.)

- Calculs d'aire et de volume :

i) L'aire du triangle formé des vecteurs u et v est donnée par $\frac{1}{2}\|u \wedge v\|$.

ii) L'aire du parallélogramme formé des vecteurs u et v est donnée par $\|u \wedge v\|$.

iii) Le volume du parallélépipède formé des vecteurs u, v et w est donné par $\det(u, v, w)$.

2. Enoncés des exercices

Exercice 1

1) Les formes quadratiques suivantes définissent-elles un produit scalaire ?

a) $Q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1x_2$,

b) $Q_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_2$.

c) $Q_3(x) = 5x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_3 + 7x_2x_3$.

2) Les formes bilinéaires suivantes sont-elles des produits scalaires sur $\mathbb{R}_3[X]$?

a) $(P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$,

b) $(P,Q) \mapsto \int_0^{\pi} P(t)Q(t)\cos(t)dt$.

Exercice 2

1) Soit Φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. On définit alors une application Ψ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\Psi(x, y) = a\Phi(x, x) + b\Phi(x, y) + c\Phi(y, y).$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que Ψ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soient x, y, z trois réels. Montrer que l'on a :

$$\text{a) } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \Rightarrow (x + 2y + 3z)^2 \leq 14,$$

$$\text{b) } x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1 \Rightarrow (x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}.$$

Exercice 3

On considère le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$\langle P,Q\rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

où $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$.

Soient les polynômes :

$$\begin{cases} P_1(X) = 3X^2 + 2X + 1\,; \\ P_2(X) = -X^2 + 2X + 1\,; \\ P_3(X) = 3X^2 + 2X + 5\,; \\ P_4(X) = 3X^2 + 5X + 2. \end{cases}$$

Déterminer un polynôme P_0 de $\mathbb{R}_2[X]$ équidistant de P_1, P_2, P_3, P_4 et calculer $d(P_0, P_1)$.

Exercice 4

1) Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire suivant:

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

2) Orthonormaliser pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, la base suivante:

$$v_1 = (0,0,-1)\,;\ v_2 = (4,-2,0)\,;\ v_3 = (2,1,0).$$

Exercice 5

1) On donne $u = (1,1,1)$, $v = (1,0,2)$ et $w = (3,1,0)$.

Calculer $u \wedge v$ puis donner l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs u et v.

Calculer le produit mixte $[u,v,w]$ puis donner le volume du parallélépipède défini par les vecteurs u, v, w.

2) Soit $u = (1,1,1)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$. Compléter ce vecteur pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Montrer que, pour tout u, v, w de E, on a :

1) $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$.

2) $(u \wedge v) \wedge (w \wedge x) = [u, w, x] v - [v, w, x] u$.

3) Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs donnés de E. Résoudre dans E l'équation $\vec{a} \wedge x = \vec{b}$.

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = Tr\left(A^T B\right)$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) On note F l'espace vectoriel engendré par les matrices symétriques de E.

a) Donner une base et la dimension de F.

b) Déterminer $F^{\perp}$, l'orthogonal de F pour le produit scalaire φ.

3. Corrigés des exercices

Exercice 1

1) Les formes quadratiques proviennent chacunes d'une forme bilinéaire et symétrique. Il reste donc à montrer que les formes quadratiques suivantes sont positives et définies, c'est-à-dire que $Q(x) \geq 0$ et $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

a) On a :

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1x_2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

On peut, à ce moment-là, remarquer que $Q_1(1, -2, 1) = 0$, alors que $(1, -2, 1) \neq (0, 0, 0)$.

La forme quadratique Q_1 ne définit pas un produit scalaire.

b) La réduction en carrés de Gauss de Q_2 donne :

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}^3, Q_2(x) \geq 0$, c'est-à-dire, Q_2 est positive.

De plus : $Q_2(x) = 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, soit $x = (0,0,0)$. Donc Q_2 est définie.

La forme quadratique Q_2 provient bien d'un produit scalaire.

c) On peut remarquer que $Q_3(0,1,0) = -1 < 0$. La forme quadratique Q_3 ne provient donc pas d'un produit scalaire.

2) a) On peut voir que cette forme bilinéaire est symétrique et $\int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt \geq 0$.

De plus, $\int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt = 0$ si et seulement si :

$$\forall t \in [0, +\infty[, (P(t))^2 e^{-t} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0, +\infty[, P(t) = 0.$$

Le polynome P admet une infinité de racines dans $[0, +\infty[$, c'est donc le polynôme nul. Cette forme bilinéaire est bien définie et positive. C'est un produit scalaire.

b) Prenons $P = Q = 1$. On a donc $\int_0^{\pi} 1 \times \cos(t) dt = [\sin t]_0^{\pi} = 0$.

Cette forme bilinéaire n'est pas un produit scalaire.

Exercice 2

1) Supposons que Ψ soit un produit scalaire.

On a d'une part :

$$\begin{aligned} \Psi(y,x) &= a\Phi(y,y) + b\Phi(y,x) + c\Phi(x,x) \\ &= a\Phi(y,y) + b\Phi(x,y) + c\Phi(x,x) \end{aligned}$$

et d'autre part :
$$\Psi(x,y) = a\Phi(x,x) + b\Phi(x,y) + c\Phi(y,y).$$

Ainsi, puisque Ψ est symétrique, on a :
$$\Psi(y,x) = \Psi(x,y),$$

c'est-à-dire :
$$a\Phi(x,x) + b\Phi(x,y) + c\Phi(y,y) = a\Phi(y,y) + b\Phi(x,y) + c\Phi(x,x),$$

soit
$$(a-c)\,\Phi(x,x) + (c-a)\,\Phi(y,y) = 0.$$

Prenons, par exemple, $x = 0$. Dans ce cas, on a : $0 = (c-a)\,\Phi(y,y),\ \forall y \in \mathbb{R}^2$.

Choisissons maintenant $y \neq 0$. Du fait que Φ est une forme bilinéaire définie, on a $\Phi(y,y) \neq 0$ pour $y \neq 0$ et donc $c = a$.

L'application Ψ s'écrit alors $\Psi(x,y) = a\Phi(x,x) + b\Phi(x,y) + a\Phi(y,y)$.

Utilisons maintenant la bilinéarité de l'application Ψ :

Soient x, y et z dans $\mathbb{R}^2$. On a d'une part :
$$\begin{aligned}\Psi(x+y,z) &= a\Phi(x+y,x+y) + b\Phi(x+y,z) + a\Phi(z,z)\\ &= a\Phi(x,x) + 2a\Phi(x,y) + aa\Phi(y,y) + b\Phi(x,z) + b\Phi(y,z) + a\Phi(z,z)\\ &= a\Phi(x,x) + 2a\Phi(x,y) + a\Phi(y,y) + b\Phi(x,z) + b\Phi(y,z) + a\Phi(z,z),\end{aligned}$$

et d'autre part :
$$\begin{aligned}\Psi(x+y,z) &= \Psi(x,z) + \Psi(y,z)\\ &= a\Phi(x,x) + b\Phi(x,z) + a\Phi(z,z) + a\Phi(y,y) + b\Phi(y,z) + a\Phi(z,z).\end{aligned}$$

On a donc :
$$\begin{aligned}&a\Phi(x,x) + 2a\Phi(x,y) + a\Phi(y,y) + b\Phi(x,z) + b\Phi(y,z) + a\Phi(z,z)\\ &= a\Phi(x,x) + b\Phi(x,z) + a\Phi(z,z) + a\Phi(y,y) + b\Phi(y,z) + a\Phi(z,z),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, après simplifications :
$$2a\Phi(x,y) = a\Phi(z,z),$$

ceci devant être vérifié pour tout x, y, z dans $\mathbb{R}^2$.

Prenons, par exemple, $x = y = 0$ et $z \neq 0$. On obtient alors :
$$a\Phi(z,z) = 0,$$

et comme, pour tout $z \neq 0$, $\Phi(z,z) \neq 0$, alors $a = 0$.

Finalement l'application Ψ s'écrit : $\Psi(x,y) = b\Phi(x,y)$.

Enfin la positivité et le caratère défini de Ψ impose $b > 0$.

Réciproquement, on montre que, si Ψ s'écrit $b\Phi$, alors Ψ est un produit scalaire.

2) a) Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Notons $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$, $\|.\|$ désigne la norme associée à ce produit scalaire.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left| \langle U, V \rangle \right|^2 \leq \|U\|.\|V\|,$$

ce qui nous conduit à :

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right).\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

c'est-à-dire, compte tenu du fait que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$:

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq 14.$$

b) Posons cette fois-ci, $U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ y\sqrt{2} \\ z\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left| \langle U, V \rangle \right|^2 \leq \|U\|.\|V\|,$$

ce qui nous conduit à :

$$(x + y + z)^2 \leq \left(1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right).\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right),$$

c'est-à-dire, compte tenu du fait que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$:

$$(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}.$$

Exercice 3

Cherchons le polynôme sous la forme :

$$P_0(X) = aX^2 + bX + c.$$

Le polynôme P_0 doit vérifier :

$$\begin{cases} (d(P_0,P_1))^2 = (a-3)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 & (1) \\ (d(P_0,P_2))^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 & (2) \\ (d(P_0,P_3))^2 = (a-3)^2 + (b-2)^2 + (c-5)^2 & (3) \\ (d(P_0,P_4))^2 = (a-3)^2 + (b-5)^2 + (c-2)^2 & (4) \end{cases}$$

(1) − (2) donne $a = 1$.
(2) − (3) donne $c = 3$.
(1) − (4) donne $b = 3$.
Le polynôme P_0 cherché s'écrit :

$$P_0(X) = X^2 + 3X + 3.$$

La distance $d(P_0,P_1)$ vaut donc :

$$d(P_0,P_1) = \sqrt{4+1+4} = 3.$$

Exercice 4

1) Orthonormalisons la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

On a $\int_{-1}^{1} 1dt = 2$.
On définit le premier vecteur de la nouvelle base par :

$$P_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Posons maintenant $P(X) = X + \lambda$.
On doit avoir :

$$\langle P,1\rangle = 0 = \langle X,1\rangle + \lambda\langle 1,1\rangle.$$

Comme $\langle X,1\rangle = 0$ et $\langle 1,1\rangle = 2$, on a $\lambda = 0$.
De plus, $\langle X,X\rangle = \frac{2}{3}$. On prend donc :

$$P_2(X) = X\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Posons $P(X) = X^2 + \lambda X + \mu$.
On doit avoir :

$$\begin{cases} \langle P,1\rangle = \langle X^2,1\rangle + \lambda\langle X,1\rangle + \mu\langle 1,1\rangle = 0 \\ \langle P,X\rangle = \langle X^2,X\rangle + \lambda\langle X,X\rangle + \mu\langle 1,X\rangle = 0. \end{cases}$$

Comme $\langle X,1\rangle = \langle X^2, X\rangle = 0$, $\langle X,X\rangle = \langle X^2,1\rangle = \dfrac{2}{3}$ et $\langle 1,1\rangle = 2$, on a:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} + 2\mu = 0 \\ \lambda = 0, \end{cases}$$

c'est à dire $\lambda = 0$ et $\mu = \dfrac{-1}{3}$.

Le polynôme P s'écrit donc:

$$P(X) = X^2 - \frac{1}{3}.$$

De plus:

$$\langle P,P\rangle = \int_{-1}^{1}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45}.$$

On prend donc:

$$P_3(X) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right).$$

La base

$$\mathcal{B} = \left\{P_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,;\, P_2(X) = X\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\, P_3(X) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$$

est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Orthonormalisons la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt:

Le vecteur v_1 est de norme 1. Posons alors $\boxed{v_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

On remarque que $\langle v_2, v_1\rangle = 0$. De plus, $\langle v_2, v_2\rangle = 20$.

On peut donc choisir

$$v_2' = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{20}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{20}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $\tilde{v}_3 = v_3 + \lambda v_2 + \mu v_1$.

On doit avoir :

$$\begin{cases} 0 = \langle \tilde{v}_3, v_1 \rangle = \langle v_3, v_1 \rangle + \lambda \langle v_2, v_1 \rangle + \mu \langle v_1, v_1 \rangle \\ 0 = \langle \tilde{v}_3, v_2 \rangle = \langle v_3, v_2 \rangle + \lambda \langle v_2, v_2 \rangle + \mu \langle v_1, v_2 \rangle \end{cases}$$

Comme $\langle v_3, v_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = 0$, $\langle v_3, v_2 \rangle = 6$ et $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$, $\langle v_2, v_2 \rangle = 20$, on a :

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ 6 + 20\lambda = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{-3}{10} \\ \mu = 0. \end{cases}$$

On a donc : $\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{10} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{8}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\langle \tilde{v}_3, \tilde{v}_3 \rangle = \dfrac{80}{25} = \dfrac{16}{5}$.

On choisit donc

$$v_3' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La base

$$\left\{ v_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; v_2' = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} ; v_3' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

1) L'aire du parallélogramme défini par les vecteurs u et v est donnée par:

$$\|u \wedge v\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6}.$$

Le volume du parallélépipède défini par les vecteurs u, v et w est donnée par:

$$\begin{aligned} [u, v, w] &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5. \end{aligned}$$

2) Prenons $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Divisons chacun de ces vecteurs par leurs normes respectives. On obtient:

$$\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \hat{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}; \hat{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la base:

$$\left\{ \hat{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \hat{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}; \hat{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

1) • 1er cas : $u=0$ ou $v=0$ ou $w=0$.

L'égalité est trivialement vérifiée.

• 2e cas : $u\neq 0$ ou $v\neq 0$: u et v colinéaires.

Dans ce cas, $u\wedge v=0$ donc $(u\wedge v)\wedge w=0$.

D'autre part $\langle u,w\rangle v-\langle v,w\rangle u=\alpha\langle v,w\rangle v-\alpha\langle v,w\rangle v=0$.

• 3e cas : $u\neq 0$ ou $v\neq 0$; u et v non colinéaires.

Dans ce cas, la famille $\{u,v\}$ est libre.

On construit une base de $\mathbb{R}^3$ en prenant la famille $\{u,v,u\wedge v\}$.

Orthonormalisons cette base en la base orthonormale directe $\{e_1,e_2,e_3\}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

$$\begin{cases} e_1=ku \\ e_2=v+\lambda e_1 \\ e_3=u\wedge v+\mu e_1+\nu e_2 \end{cases}$$

Inversons ce système :

$$\begin{cases} u=\alpha e_1 \\ v=\beta e_1+\gamma e_2 \\ u\wedge v=ae_1+be_2+ce_3. \end{cases}$$

Posons $w=pe_1+qe_2+re_3$.

Calculons, d'une part,

$$\begin{aligned}(u\wedge v)\wedge w &=(\alpha\gamma e_3)\wedge(pe_1+qe_2+re_3)\\ &=\alpha\gamma pe_2-\alpha\gamma qe_1,\end{aligned}$$

et, d'autre part :

$$\begin{aligned}\langle u,w\rangle v-\langle v,w\rangle u &=\alpha p(\beta e_1+\gamma e_2)-(\beta p+\gamma q)(\alpha e_1)\\ &=\alpha p\beta e_1+\alpha p\gamma e_2-\alpha\beta pe_1-\alpha\gamma qe_1\\ &=\alpha p\gamma e_2-\alpha\gamma qe_1.\end{aligned}$$

On a bien le résultat attendu.

2) Remplacons w par le vecteur $w\wedge x$ dans l'équation précédente. On a alors :

$$(u\wedge v)\wedge(w\wedge x)=\langle u,w\wedge x\rangle v-\langle v,w\wedge x\rangle u.$$

Or, on sait que :

$$\langle u,w\wedge x\rangle=[u,w,x],$$

et que :

$$\langle v, w \wedge x \rangle = [v, w, x].$$

On a bien le résultat attendu.

3) On peut tout d'abord remarquer que, grâce à une propriété du produit vectoriel, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle a \wedge x, a \rangle = 0,$$

c'est-à-dire:

$$\langle b, a \rangle = 0.$$

Deux cas se présentent alors :

- 1er cas : $\langle a, b \rangle \neq 0$.

  Il n'y a pas de solution.

- 2e cas : $\langle a, b \rangle = 0$.

Examinons plusieurs sous-cas :

Si $a = 0$ et $b \neq 0$: il n'y a pas de solutions.

Si $a = 0$ et $b = 0$: tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ est solution.

Si $a \neq 0$ et $b = 0$: $a \wedge x = 0$, donc x est colinéaire à a.

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$: dans ce cas, la famille $\{a, b\}$ est libre.

De plus, $\{a, b, a \wedge b\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, puisque $\langle a, b \rangle = 0$ et que $a \wedge b$ est orthogonal à a et b.

On pose donc $x = \alpha a + \beta b + \gamma a \wedge b$. On a alors :

$$\begin{aligned} a \wedge x &= a \wedge (\alpha a + \beta b + \gamma a \wedge b) \\ &= \alpha a \wedge a + \beta b \wedge a + \gamma (a \wedge b) \wedge a \\ &= -\beta a \wedge b - \gamma (a \wedge b) \wedge a \\ &= -\beta a \wedge b - \gamma \|a\|^2 b, \end{aligned}$$

car, d'après ce qui précède, $(a \wedge b) \wedge a = \langle a, a \rangle b - \langle b, a \rangle a = \|a\|^2 b$.

On a donc : $a \wedge x = -\beta a \wedge b - \gamma \|a\|^2 b = b$.

On en déduit que :

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ -\gamma \|a\|^2 = 1. \end{cases}$$

Ainsi, $x = \alpha a - \dfrac{a \wedge b}{\|a\|^2}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

1) L'application φ est clairement linéaire.

De plus, $\varphi(B,A) = Tr\left(B^T A\right) = Tr\left(\left(B^T A\right)^T\right) = Tr\left(A^T B\right) = \varphi(A,B)$.

Montrons la positivité de $\varphi(A,A)$.

En notant $A = \left(A_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, on obtient :

$$\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(A_{i,j}\right)^2 \geq 0,$$

d'où la positivité de $\varphi(A,A)$.

Montrons maintenant que φ est définie.

$$\begin{aligned}
\varphi(A,A) = 0 \quad & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(A_{i,j}\right)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^{n}\left(A_{i,j}\right)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall i \in \{1,\dots,n\}, A_{i,j} = 0 \\
& \Leftrightarrow A = 0,
\end{aligned}$$

d'où le fait que φ est définie.

2) a) L'espace vectoriel des matrices symétriques est engendré par les matrices de la forme :

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccccc} \cdots & \cdots & \downarrow i & \cdots & \cdots \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \ddots & & \vdots & & 0 \\ & 0 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow i \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \end{array} \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

et

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccccc} \cdots & i\downarrow & \cdots & \downarrow j & \cdots \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & & 0 & & \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vdots \\ \leftarrow i \\ \vdots \\ \leftarrow j \\ \vdots \end{array} \end{array}, \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall j \in \{1,\dots,n\}.$$

La première forme engendre n matrices.

La deuxième forme engendre $(n-1)+(n-2)+...+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ soit le nombre de positions que peut prendre le nombre dans la partie supérieure de la matrice, diagonale exclue. (Les matrices avec des 1 sur la diagonale sont compatibilisées dans la première forme).

Ainsi, la dimension de F est : $n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Donc $\dim F=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Notons G, l'ensemble des matrices antisymétriques et montrons que $F^{\perp}=G$.

- Démontrons que $G\subset F^{\perp}$.

  Soit $M\in G$, une matrice antisymétrique et A une matrice symétrique. Montrons que $M\in F^{\perp}$.

  On a d'une part : $\varphi(A,M)=Tr(A^{T}M)=Tr(AM)$, car A est symétrique.

  D'autre part, on a : $\varphi(A,M)=\varphi(M,A)=Tr(M^{T}A)=-Tr(MA)=-Tr(AM)$, car M est antisymétrique et φ symétrique.

  Ainsi : $\varphi(A,M)=Tr(AM)=-Tr(AM)$.

  Donc $Tr(AM)=0$, c'est-à-dire $Tr(A^{T}M)=0$, donc : $M\in F^{\perp}$.

- Démontrons que $F^{\perp}\subset G$.

  Cette inclusion se montre par égalité des dimensions.

  En effet, on sait que : $\dim F+\dim F^{\perp}=\dim E=n$, pour une forme lilinéaire non dégénérée.

  Donc, $\dim F^{\perp}=n-\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

  De plus, on sait que l'ensemble des matrices antisymétriques est un espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

  D'où le résultat.

Chapitre 8

Matrices orthogonales

1. Rappels de cours

Soit E un espace euclidien de dimension 3. On note $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E.

a) Définitions et propriétés

1) Définition d'une matrice orthogonale

Une matrice A est une matrice orthogonale si :

$$A^T A = I.$$

2) Définitions équivalentes

- Une matrice A est une matrice orthogonale si les vecteurs-colonnes qui composent la matrice A forment une base orthonormée de E.
- Une matrice A est une matrice orthogonale si :
$$\forall x, y \in E, \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

3) Une propriété des matrices orthogonales

Soit A une matrice orthogonale. Alors $\det A = \pm 1$.

- Si $\det A = +1$, alors A est une rotation.
- Si $\det A = -1$, alors A est une symétrie orthogonale ou la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation.

b) Espace euclidien orienté

Introduisons maintenant la notion d'espace euclidien orienté utile pour l'étude des rotations.

1) Orientation d'espace euclidien

- On dit que deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1 \text{ ou } \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1.$$

  Dans le cas contraire, on dit que les deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ n'ont pas la même orientation.

- On dit qu'une base orthonormée $\mathcal{B}$ est directe si $\mathcal{B}$ a la même orientation que la base canonique de E. Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée indirecte.

- On dit que l'espace euclidien E est orienté si toute base orthonormée de E est directe ou indirecte.

c) Plan d'étude d'une rotation

On suppose, dans cette partie, que E est un espace euclidien orienté.

- On recherche un vecteur invariant par A, c'est-à-dire un vecteur n tel que:

$$An = n.$$

  L'axe de la rotation A est alors donné par $vect\{n\}$.

- Recherche de l'angle θ de la rotation:

  i) Calcul de $\cos\theta$

  Il est donné par la formule: $\boxed{TrA = 1 + 2\cos\theta}$ où TrA désigne la trace de A c'est-à-dire la somme des termes diagonaux de A.

  ii) Calcul de $\sin\theta$

  On choisit un vecteur quelconque x, non invariant par A.

  Le signe de $\sin\theta$ est alors donné par le signe de $\det(x, Ax, n)$ où n est le vecteur calculé ci-dessus.

d) Projection et symétrie orthogonales

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ une base orthonormée de F.

On note enfin P_F la projection orthogonale sur F et S_F la symétrie orthogonale par rapport au plan F.

▶ Définitions

- La projection orthogonale sur F est donnée par :

$$\forall x \in E,\ P_F(x) = \sum_{i=1}^{i=p} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

- La symétrie orthogonale par rapport au plan F est donnée par :

$$\forall x \in E,\ S_F(x) = 2P_F(x) - x.$$

▶ Propriétés

Si on note $F^{\perp}$ l'orthogonal de F, alors :

- La projection orthogonale sur $F^{\perp}$, noté $P_{F^{\perp}}$, est donnée par :

$$\forall x \in E,\ P_{F^{\perp}}(x) = x - P_F(x),$$

- La symétrie orthogonale par rapport à la droite $F^{\perp}$, noté $S_{F^{\perp}}$, est donnée par :

$$\forall x \in E,\ S_{F^{\perp}}(x) = x - S_F(x).$$

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

Déterminer la matrice de la rotation R de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que $R(\vec{u}) = \vec{u}$ où $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $R(\vec{i}) = \vec{k}$. Donner son angle de rotation.

Exercice 2

Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale de déterminant positif puis étudier l'endomorphisme représenté par A.

Exercice 3

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et B une base orthonormée directe. Etudier les endomorphismes de E représentés dans la base B par les matrices suivantes :

$$\text{a) } A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A_4 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

1) Préciser une base orthonormale de F.
2) Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.
3) Donner l'expression de $P_F(x)$, la projection orthogonale d'un élément quelconque $x \in \mathbb{R}^3$ sur F.

   Préciser les images par P_F des vecteurs de la base définie précédemment.
4) Pour x dans $\mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(x, F)$.
5) Ecrire la matrice (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de la symétrie orthogonale S_F par rapport à F. Quelle est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.
6) Ecrire la matrice (relativement à la base canonique) de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe $F^\perp$.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique. Soient u et v deux vecteurs de E linéairement indépendants.

1) On considère $F = vect\{u, v\}$ et n un vecteur unitaire orthogonal à F. On note P la projection orthogonale sur F.

   a) Montrer que l'on a : $\forall x \in E,\ P(x) = x - \langle x, n\rangle n$.

   b) Déterminer analytiquement P lorsque $u = (-1,0,2)$ et $v = (-2,1,3)$.

2) On suppose que E est muni d'une base orthonormale directe. On considère la rotation R d'axe D orienté par le vecteur unitaire n et d'angle θ.

a) Montrer que : $\forall x \in F,\ \langle x, n \rangle = 0$ et $R(x) = x\cos\theta + (n \wedge x)\sin\theta$.

b) On note, pour chaque vecteur x de E, x_1 sa projection orthogonale sur D et x_2 celle sur la plan orthogonal à D. Montrer que $x_1 = \langle x, n \rangle n$ et $x_2 = x - \langle x, n \rangle n$.

c) En déduire que : $\forall x \in E,\quad R(x) = x\cos\theta + (n \wedge x)\sin\theta + (1-\cos\theta)\langle x, n \rangle n$.

d) *Application*

Déterminer analytiquement R lorsque $n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

3. Corrigés des exercices

Exercice 1

La matrice de R s'écrit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} R(i) & R(j) & R(k) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha' \\ 0 & \beta & \beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} \end{array}$$

Cette matrice est orthogonale, donc les vecteurs-colonnes forment une base orthonormale. Ainsi, $\langle R(i), R(j) \rangle = 0$, donc $\gamma = 0$.

Sur le même principe, on montre que : $\gamma' = 0$.

De plus, $\|R(j)\| = \|R(k)\| = 1$, donc :

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 = 1. \end{cases}$$

On a aussi $\langle R(j), R(k) \rangle = 0$, donc :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0,$$

et on a $\det A = +1$ donc :

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1.$$

et, finalement, compte tenu du fait que: $R(u) = u$, on a:

$$\begin{cases} \alpha + \alpha' = 1 \\ \beta + \beta' = -1. \end{cases}$$

On obtient finalement le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 & (1) \\ \alpha'^2 + \beta'^2 = 1 & (2) \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0 & (3) \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1 & (4) \\ -\alpha + \alpha' = 1 & (5) \\ -\beta + \beta' = -1. & (6) \end{cases}$$

En remplaçant (5) et (6) dans (2), on obtient:

$$(1+\alpha)^2 + (-1+\beta)^2 = 1,$$

c'est-à-dire:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha - 2\beta = -1,$$

soit, compte tenu du fait que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$:

$$-\alpha + \beta = 1.$$

En remplaçant (5) et (6) dans (4), on obtient:

$$\alpha(-1+\beta) - (1+\alpha)\beta = 1,$$

c'est-à-dire:

$$-\alpha + \alpha\beta - \beta - \alpha\beta = 1,$$

soit:

$$\alpha + \beta = -1.$$

On obtient donc:

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = -1, \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ \alpha' = 0 \\ \beta' = -1. \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de R est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Recherche de son angle de rotation θ :

On a $Tr(A) = 0 = 1 + 2\cos\theta$. On a donc $\cos\theta = \frac{-1}{2}$.

Ainsi, $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$.

Déterminons maintenant $\sin\theta$:

Prenons un vecteur quelconque, par exemple, $x = (1,0,0)$.

On a $R(x) = (0,0,1)$ et l'axe de rotation de R est u.

Le signe de $\sin\theta$ est donc donné par :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

Ainsi, $\sin\theta > 0$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 2

Utilisons le fait que les vecteurs-colonnes de A forment une base orthonormale.

Posons :

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \alpha \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\},$$

les trois vecteurs-colonnes de A.

On a : $(v_1, v_2) = 0$ donc $\alpha = \frac{-2}{7}$.

D'autre part on veut que A soit de déterminant positif, c'est-à-dire que la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ est directe : on peut alors choisir pour v_3 :

$$v_3 = v_1 \wedge v_2.$$

Ainsi :

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Etudions l'endomorphisme orthogonal représenté par A :

- Recherche des vecteurs propres de A :

  1 est la seule valeur propre réelle. Un vecteur propre unitaire associé est :

$$e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

- Complétons e_1' pour former une base orthonormée directe de E.

  On peut choisir $e_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3' = e_1' \wedge e_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

  L'endomorphisme représenté par A est donc une rotation d'axe orienté par e_1' et d'angle θ que l'on va préciser plus loin. Dans la base orthonormée directe $\{e_1', e_2', e_3'\}$, A s'écrit:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Calcul de l'angle θ :

  Le calcul de la trace donne: $Tr(A) = 1 + 2\cos\theta = \frac{18}{7}$, soit $\cos\theta = \frac{11}{14}$.

- Signe de $\sin\theta$:

  Soit $x = (1,0,0)$. Alors $Ax = (\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7})$. Le signe de $\sin\theta$ est donné par:

$$\det(x, Ax, e_1') = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} < 0,$$

donc $\sin\theta < 0$ pour ce choix d'orientation de e'_1.

REMARQUE

Si on pose $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, alors

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{14} & \frac{5\sqrt{3}}{14} \\ 0 & -\frac{5\sqrt{3}}{14} & \frac{11}{14} \end{pmatrix} = A'.$$

Exercice 3

a) Étude de l'endomorphisme orthogonal A_1 :

La matrice A_1 est de déterminant $+1$.

- Recherche des vecteurs propres de A_1 :

1 est valeur propre simple. Un vecteur propre associé est :

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

-1 est valeur propre double. Les vecteurs propres associés sont :

$$e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e'_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice A_1 est celle d'une symétrie orthogonale par rapport à $vect\{e'_1\}$.

b) Étude de l'endomorphisme orthogonal A_2 :

La matrice A_2 est de déterminant $+1$.

- Recherche des vecteurs propres de A_2 :

  1 est la seule valeur propre réelle. Un vecteur propre unitaire associé est

$$e_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

- Complétons e_1' pour former une base orthonormée directe de E.

  On peut choisir $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3' = e_1' \wedge e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

  L'endomorphisme représenté par A_2 est donc une rotation d'axe orienté par e_1' et d'angle θ que l'on va préciser plus loin. Dans la base orthonormée directe $\{e_1', e_2', e_3'\}$, A s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Calcul de l'angle θ :

  Le calcul de la trace donne : $Tr(A_2) = 1 + 2\cos\theta = 0$, soit $\cos\theta = \frac{-1}{2}$.

- Signe de $\sin\theta$:

  Soit $x = (1,0,0)$. Alors $Ax = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{-\sqrt{6}}{4})$. Le signe de $\sin\theta$ est donné par :

$$\det(x, Ax, e_1') = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} > 0,$$

  donc $\sin\theta > 0$ pour ce choix d'orientation de e_1'.

REMARQUE

Si on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, alors

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = A'.$$

c) Étude de l'endomorphisme orthogonal A_3 :

La matrice A_3 est de déterminant -1.

- Recherche des vecteurs propres de A_3 :

  -1 est valeur propre simple. Un vecteur propre associé est :

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1 est valeur propre double. Les vecteurs propres associés sont

$$e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; et \; e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice A_3 est celle d'une symétrie orthogonale par rapport à $vect\left\{e_2', e_3'\right\}$.

d) Étude de l'endomorphisme orthogonal A_4 :

La matrice A_4 est déterminant -1.

- Recherche des vecteurs propres de A_4 :

  -1 est valeur propre simple. Un vecteur propre associé est :

$$e_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1 est valeur propre double. Les vecteurs propres associés sont :

$$e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- La matrice A_4 est celle d'une symétrie orthogonale par rapport à $vect\{e_2', e_3'\}$.

Exercice 4

1) En remarquant que $x_1 = -x_2 - x_3$, on obtient la base :

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Orthonormalisons cette base par le procédé de Schmidt :

$\|v_1\| = \sqrt{2}$. On pose donc $v_1' = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Posons maintenant $\tilde{v}_2 = v_2 + \lambda v_1'$ où λ est tel que : $\langle \tilde{v}_2, v_1' \rangle = 0$, c'est-à-dire :

$$\langle v_2, v_1' \rangle + \lambda \langle v_1', v_1' \rangle = 0,$$

soit $\lambda = -\langle v_2, v_1' \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On a donc : $\tilde{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. De plus $\|\tilde{v}_2\| = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

On pose alors : $v_2' = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

La base $\{v_1', v_2'\}$ ainsi définie est une base orthonormale de F.

2) L'orthogonal de F est un espace vectoriel de dimension 1. Comme base, on peut choisir le vecteur : $v_1' \wedge v_2'$.

On trouve : $v_1' \wedge v_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = v_3'$.

Ainsi :

$$F^{\perp} = vect\,\{v_3'\}.$$

3) L'expression de P_F est donnée par :

$$P_F(x) = (x, v_1')v_1' + (x, v_2')v_2'.$$

On trouve donc :

$$P_F = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

De plus, $P_F(v_1') = v_1'$ et $P_F(v_2') = v_2'$ car v_1' et v_2' appartiennent à F.

Par contre, $P_F(v_3') = 0$, car v_3' appartient à $F^{\perp}$.

4) Calculons tout d'abord $P_F(x)$.

$$P_F(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La distance $d(x, F)$ est donnée par :

$$d(x, F) = \|x - P_F(x)\|,$$

c'est-à-dire :

$$d(x, F) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

5) La symétrie S_F est donnée par : $S_F = 2P_F - I$.

Sa matrice est donc :

$$S_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La symétrie $S_{F^\perp}$ par rapport à $F^\perp$ est donnée par : $S_{F^\perp} = I - S_F$, (car $S_{F^\perp} + S_F = I$.), c'est-à-dire :

$$S_{F^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

6) La matrice de cette rotation relativement à la base $\{v_1', v_2', v_3'\}$ est donnée par :

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons maintenant la matrice de passage P donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que la base $\{v_1', v_2', v_3'\}$ est orthonormée directe et une des conséquences est que $P^{-1} = P^T$.

Ainsi, la matrice de cette rotation relativement à la base canonique est telle que :

$$A' = P^T AP = P^{-1}AP,$$

c'est-à-dire :

$$A = PA'P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1) a) Soit x dans E. On sait que la projection orthogonale sur $F^\perp = Vect\{n\}$ est donnée par : $P_{F^\perp}(x) = \langle x, n\rangle n$. De plus, $x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x)$.

On a donc : $P_F(x) = x - P_{F^\perp}(x) = x - \langle x, n\rangle n$.

b) Calculons d'abord le vecteur n. On a : $u \wedge v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On choisit donc pour $n : n = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, par exemple.

Calculons maintenant $P_F(e_1), P_F(e_2), P_F(e_3)$, où $\{e_1, e_2, e_3\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$P_F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

De même,

$$P_F(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} ; P_F(e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

D'où la matrice de P_F : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$.

2) a) Soit x dans F. Alors x est orthogonal à n, donc $\langle x,n\rangle = 0$.

Si $x=0$, alors la formule: $R(x) = x\cos\theta + (n \wedge x)\sin\theta$ est clairement vérifiée.

Supposons maintenant $x \neq 0$, alors $\frac{x}{\|x\|}$ existe et est un vecteur de norme 1. De plus, $\left\{\frac{x}{\|x\|}, \frac{n\wedge x}{\|x\|}, n\right\}$ est une base orthonormée directe.

En particulier, $\left\{\frac{x}{\|x\|}, \frac{n\wedge x}{\|x\|}\right\}$ est une base orthonormée de F, car $\frac{x}{\|x\|} \in F$ et $\langle\frac{n\wedge x}{\|x\|}, n\rangle = 0$.

Donc $R(x)$ s'écrit: $R\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \cos\theta\frac{x}{\|x\|} + \sin\theta\frac{n\wedge x}{\|x\|}$, soit, en multipliant par $\|x\|$ et en utilisant la linéarité de R, on obtient:

$$R(x) = x\cos\theta + (n\wedge x)\sin\theta.$$

b) On a: $x = x_1 + x_2$. De plus, $x_1 \in D$, donc $x_1 = \lambda n$.

Il reste à déterminer λ. Pour cela, on calcule $\langle x,n\rangle$:

$\langle x,n\rangle = \langle x_1,n\rangle + \langle x_2,n\rangle = \langle x_1,n\rangle$ car x_2 est orthogonal à n.

donc $\langle x,n\rangle = \langle x_1,n\rangle = \langle \lambda n,n\rangle = \lambda\langle n,n\rangle = \lambda$ car n est unitaire (c'est-à-dire de norme 1).

Ainsi $x_1 = \langle x,n\rangle n$ et $x_2 = x - x_1 = x - \langle x,n\rangle n$.

c) Soit x dans E. Alors $x = x_2 + \langle x,n\rangle n$. En utilisant la linéarité de R, on en déduit que:

$$R(x) = R(x_2) + R(\langle x,n\rangle n) = R(x_2) + \langle x,n\rangle R(n).$$

- Calcul de $R(n)$:

  R est la rotation d'axe D orienté par n, donc $R(n) = n$.

- Calcul de $R(x_2)$:

  x_2 est un vecteur de F, on peut donc appliquer le résultat de la question 2) a), à savoir:

$$R(x_2) = x_2\cos\theta + (n\wedge x_2)\sin\theta.$$

D'autre part, on sait que : $x_2 = x - \langle x, n\rangle n$. On a donc :

$$R(x_2) = (x - \langle x, n\rangle n)\cos\theta + \big(n \wedge (x - \langle x, n\rangle n)\big)\sin\theta,$$

c'est-à-dire :

$$R(x_2) = x\cos\theta - \langle x, n\rangle n\cos\theta + (n \wedge x)\sin\theta - \langle x, n\rangle (n \wedge n)\sin\theta,$$

comme $n \wedge n = 0$, on obtient :

$$R(x_2) = x\cos\theta - \langle x, n\rangle n\cos\theta + (n \wedge x)\sin\theta.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} R(x) &= R(x_2) + \langle x, n\rangle R(n) \\ &= R(x_2) + \langle x, n\rangle n \\ &= x\cos\theta - \langle x, n\rangle n\cos\theta + (n \wedge x)\sin\theta + \langle x, n\rangle n \\ &= x\cos\theta + (n \wedge x)\sin\theta + (1 - \cos\theta)\langle x, n\rangle n. \end{aligned}$$

d) Application numérique

En notant à nouveau $\{e_1, e_2, e_3\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on obtient :

$$\begin{aligned} R(e_1) &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} + \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\sin\frac{\pi}{4} + (1 - \cos\frac{\pi}{4}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\\\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

De même, $R(e_2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $R(e_3) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

D'où la matrice de R :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 9

Espaces affines - Barycentre

1. Rappels de cours

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Un élément de E est appelé point.

Pour tout M et M' dans E, on note $\overrightarrow{MM'} = M' - M$.

On a ainsi $M' = M + \overrightarrow{MM'}$.

a) Variétés linéaires affinies

▸ Définition d'une variété linéaire affine

- Soit $A \in E$ et $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de E.

  On appelle **variété linéaire affine** de E passant par A et dirigé par $\vec{F}$, l'ensemble $A+\vec{F}$ défini par :

$$A+\vec{F} = \left\{A+\vec{x}, \vec{x} \in \vec{F}\right\} = \left\{M \;/\; \overrightarrow{AM} \in \vec{F}\right\}.$$

- Définition équivalente

  Une partie W de E est appelé variété linéaire affine si et seulement s'il existe $A \in E$ et $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de E tel que :

$$W = A+\vec{F}.$$

  Le sous-espace vectoriel $\vec{F}$ s'appelle direction de la variété linéaire affine W et est noté $\vec{W}$.

▸ Dimension d'une variété linéaire affine

Soit W une variété linéaire affine. La dimension de W est définie par :

$$\dim W = \dim \vec{W}.$$

▶ Variétés linéaires affines parallèles

Soient W et W' deux variétés linéaires affines.

W est parallèle à W' si et seulement si $\vec{W} \subset \vec{W'}$

b) Barycentre d'un système pondéré de points

1) Définitions

▶ Système de points pondérés

On appelle système fini de points pondérés de E toute famille finie $\{(A_i, \alpha_i), 1 \leq i \leq n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_n \in E$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

▶ Barycentre d'un système pondéré de points

Soit $\{(A_i, \alpha_i), 1 \leq i \leq n\}$ une famille finie de points pondérés de E telle que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0.$$

Alors il existe un point unique $G \in E$ tel que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Le point G est appelé barycentre du système $\{(A_i, \alpha_i), 1 \leq i \leq n\}$.

▶ Définition équivalente

Pour tout point M de E,

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \times \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}.$$

2) Droites

▶ Équations paramétriques d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $u = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Alors, la droite $\mathcal{D}$ a pour équations paramétriques:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta, \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

▶ Équations canoniques d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $u = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Alors, la droite $\mathcal{D}$ a pour équations canoniques :

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

3) Plans

▶ Points coplanaires

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0.$$

▶ Équation cartésienne d'un plan

Le plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C a son équation cartésienne donnée par :

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0,$$

où M est un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y, z).

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

Soient A, B, C, D quatre points de $\mathcal{E}_3$, de coordonnées respectives :

$$(0,2,-1), (-1,4,0), (4,0,2), (1,1,-1).$$

Déterminer le barycentre du système pondéré :

$$\left\{(A,1), (B,3), \left(C, \frac{1}{2}\right), (D2)\right\}.$$

Exercice 2

Soient A, B, C, A', B', C' six points d'un espace affine $\mathcal{E}$ et G, G' les centres de gravité de A, B, C, respectivement de A', B', C'.

1) Montrer que :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

2) Montrer que les points G et G' sont confondus si et seulement s'il existe un point M tel que $BA'CM$ et $B'AC'M$ soient des parallélogrammes.

Exercice 3

On donne trois points non alignés A, B, C de $\mathcal{E}_2$. Quel est l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$?

Exercice 4

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Le point I est le milieu de $[A,D]$, J est le milieu de $[B,C]$, K est au tiers de $[B,A]$ en partant de B et L est au tiers de $[C,D]$ en partant de C. Montrer que les droites $(KI),(JL)$ et (BD) sont concourantes. En déduire que les points I,J,K,L sont coplanaires.

Exercice 5

Montrer que:

$$\mathcal{V}=\left\{\begin{pmatrix}1+a+3b & a\\ 2-2a-c & a+b\end{pmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

est une variété linéaire affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En déduire un point et la direction.

Exercice 6

1) Montrer que les points de $\mathcal{E}_3$, de coordonnées affines

$$A(1,1,1),\ B(3,-1,4),\ C(0,7,-3),\ D(5,7,2)$$

sont coplanaires.

2) Considérons $\mathcal{R}'=\left(M,\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3},\overrightarrow{f_4}\right)$ un repère cartésien quelconque de $\mathcal{E}_3$ et trois points M_1,M_2,M_3 de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}'$: $(1,-\alpha,3),(\alpha,-1,1)$ et $(3,1,-1)$. Déterminer α pour que les points M,M_1,M_2,M_3 soient coplanaires.

Exercice 7

On considère la droite affine $\mathcal{D}:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}$ et le point $O'(-2,0,1)$. On note par $\overrightarrow{f_1}$ un vecteur unitaire directeur de $\mathcal{D}$, par $\overrightarrow{f_2}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\mathcal{D}$ qui appartient au plan yOz et par $\overrightarrow{f_3}$ un vecteur unitaire choisi tel que $\left\{\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3}\right\}$ soit une base orthonormale directe. Établir la formule de changement de repère cartésien lorsqu'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'=\left\{O',\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3}\right\}$.

Exercice 8

On considère l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$.

1) Déterminer les équations canoniques et paramétriques de la droite $\mathcal{D}_1$, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations normales : $x + y + 3z - 1 = 0$ et $x + y + z + 3 = 0$ respectivement.

2) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et passant par $A(-1,1,1)$.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la droite $\mathcal{D}_2$ d'équations canoniques :

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{\alpha}.$$

a) Vérifier que $\mathcal{D}_2$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

b) Déterminer la valeur de α pour laquelle $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes.

Exercice 9

On considère l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$.

Soient A, B, C les trois points de $\mathcal{E}$ suivants :

$$A(1,2,3)\,;\, B(2,-1,2)\,;\, C(0,1,-2).$$

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les deux droites d'équations paramétriques respectives :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2 - t_1 \\ y = 1 + 2t_1 \\ z = -1 + t_1 \end{cases} ,\, t_1 \in \mathbb{R}\,;\, \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t_2 \\ y = -2t_2 \\ z = 3 + 5t_1 \end{cases} ,\, t_2 \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer les équations canoniques de la droite $\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{D}_1$ et passant par A.

2) Déterminer l'équation normale du plan $\mathcal{P}_1$ contenant les points A, B, C.

3) Déterminer les équations paramétriques du plan $\mathcal{P}_2$ qui contient $\mathcal{D}_1$ et qui est parallèle à $\mathcal{D}_2$.

Exercice 10

On considère l'espace affine tridimensionnel usuel $\mathcal{E}$, muni du repère affine

$$\mathcal{R} = \left(0\,;\, e_1, e_2, e_3\right)$$

où $\left\{e_1, e_2, e_3\right\}$ est une base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère la droite

$$\mathcal{D} : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{-1}.$$

1) Écrire l'équation du plan $\mathcal{P}$ contenant la droite $\mathcal{D}$ et passant par le point $A(0,1,1)$.

2) Vérifier que le point $B(1,-1,4)$ appartient au plan $\mathcal{P}$. Écrire l'équation du plan $\mathcal{P}'$ passant par B et perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.

3) Donner les équations canoniques de la droite $\mathcal{D}'$, intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

4) Trouver les coordonnées du point M appartenant à la droite $\mathcal{D}$, tel que la distance euclidienne $\|BM\|$ soit minimale.

Exercice 11

Dans l'espace affine tridimensionnel usuel $\mathcal{E}$ muni du repère affine $\mathcal{R} = \left\{O\,;e_1,e_2,e_3,e_4\right\}$ on considère les droites

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases} \text{et } \mathcal{D}_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{\alpha}.$$

1) Déterminer le paramètre réel α tel que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient concourantes Déterminer ensuite les coordonnées du point d'intersection entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2) Écrire l'équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par ces deux droites.

3) Donner ensuite les équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $M(5,-4,1)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

3. Corrigés des exercices

Exercice 1

Notons G le barycentre du système pondéré :

$$\left\{(A,1),(B,3),\left(C,\frac{1}{2}\right),(D,2)\right\}.$$

Le point G est défini par :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

En posant $G(x,y,z)$, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+3(x+1)+\dfrac{1}{2}(x-4)+2(x-1)=0 \\ (y-2)+3(y+4)+\dfrac{1}{2}y+2(y-1)=0 \\ (z+1)+3z+\dfrac{1}{2}(z-2)+2(z+1)=0, \end{cases}$$

soit :

$$G\left(\frac{2}{13},\frac{-16}{13},\frac{-4}{13}\right).$$

Exercice 2

1) Le point G est le centre de gravité de A,B,C, donc :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \quad (1).$$

D'autre part, le point G' est le centre de gravité de A',B',C', donc:

$$\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0} \quad (2).$$

En introduisant le point G' dans la relation (1), on obtient :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{BG'}+\overrightarrow{CG'} \quad (*) \\ &= \overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'G'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{B'G'} \\ &= \overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}+\underbrace{\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}}_{=0} \\ &= \overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}. \end{aligned}$$

De la même façon, en utilisant la relation (*), on obtient :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{BG'}+\overrightarrow{CG'} \quad (*) \\ &= \overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'G'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{A'G'} \\ &= \overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}+\underbrace{\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}}_{=0} \\ &= \overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant de nouveau la relation (*), on obtient :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{BG'} + \overrightarrow{CG'} \quad (*) \\ &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'} \\ &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'} \\ &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} \text{ en utilisant la relation (2).} \end{aligned}$$

2) Supposons que les points G et G' soient confondus. On a alors $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$, soit :

$$\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA'} &= -\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{CB'} \\ &= -\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MB'} \\ &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{B'M} \\ &= \overrightarrow{MC} + \end{aligned}$$

On choisit le point M défini par :

$$\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{B'M} = \vec{0},$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{C'A}.$$

On obtient alors $\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{MC}$.

Avec ce choix de M, les quadrilatères $B'AC'M$ et $BA'CM$ sont des parallélogrammes.

Réciproquement, supposons qu'il existe un point M tel que $BA'CM$ et $B'AC'M$ soient des parallélogrammes. Montrons que $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$.

Comme $BA'CM$ et $B'AC'M$ sont des parallélogrammes, alors on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{MC} \\ \overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{MC'}. \end{cases}$$

De plus, on sait que :

$$\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{GG'},$$

donc :

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'}\\ &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB'}\\ &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB'} (\text{car } \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{B'A} \text{ et } \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{MC})\\ &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{MB'}\\ &= \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'A} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Exercice 3

Considérons G le barycentre du système pondéré :

$$\{(A,1),(B,1),(C,2)\}.$$

On a alors :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\\ &= 4\overrightarrow{MG},\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est la droite D passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 4

I est le milieu de $[AD]$, donc I est barycentre de $\{(A,1),(D,1)\}$.

Ainsi, pour tout M de E,

$$2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}. (*)$$

De plus, K est barycentre de $\{(A,1),(B,2)\}$, donc, pour tout M de E,

$$3\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}. (**)$$

Remplaçons $\overrightarrow{MA}$ dans (**) par son expression donnée par (*) :

$$3\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MB}$$

Légitimons maintenant le choix de M :

On choisit pour M le point G barycentre de $\{(D,-1),(B,2)\}$, ainsi:

$$-2\overrightarrow{GD}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}.$$

Ce choix de G montre que G,B,D sont alignés.

Or, G vérifie de plus $3\overrightarrow{GK}=2\overrightarrow{GI}$, donc G,K,I sont alignés.

Ainsi, les droites (KI) et (BD) sont concourantes en le point G que l'on a défini comme le barycentre de $\{(D,-1),(B,2)\}$.

De la même manière, on montre que les droites (JL) et (BD) sont concourantes en ce même point G.

Les droites (IK) et (JL) sont sécantes en G, donc coplanaires : les points I,K,J,L sont donc coplanaires.

Exercice 5

Prenons $M\in\mathcal{V}$. On a alors :

$$M=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Un point de $\mathcal{V}$ est donc :

$$M_0=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}.$$

La direction de $\mathcal{V}$ est $\vec{\mathcal{V}}$ définie par :

$$\vec{\mathcal{V}}=vect\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 6

1) Les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\6\\-4\end{pmatrix};\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}.$$

Les points A,B,C,D sont coplanaires si et seulement si :

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=0.$$

Par ailleurs, le calcul de $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ donne :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 6 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -2 & 6 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}, C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & -6 \\ 3 & -4 & 10 \end{vmatrix} \\
&= -5\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} \\
&= -5(-20+18) = 10 \neq 0.
\end{aligned}$$

Les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

2) Calculons :

$$\overrightarrow{MM_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{MM_2} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{MM_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les points M, M_1, M_2, M_3 sont coplanaires si et seulement si :

$$\det\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_3}\right) = 0.$$

Par ailleurs, le calcul de $\det\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_3}\right)$ donne :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_3}\right) &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ -\alpha & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \alpha+3 & 3 \\ -\alpha & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(\alpha+3)\begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(\alpha+3)(\alpha-3).
\end{aligned}$$

Les points M, M_1, M_2, M_3 sont donc coplanaires si et seulement si : $\alpha = -3$ ou $\alpha = 3$.

Exercice 7

Le vecteur $\overrightarrow{f_1}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{f_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

De même, on peut choisir pour $\overrightarrow{f_2}$:

$$\overrightarrow{f_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on prend :

$$\overrightarrow{f_3} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} = \overrightarrow{f_1} \wedge \overrightarrow{f_2}.$$

Notons par (x, y, z) les coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$ et par (x', y', z') les coordonnées de ce même point M dans le repère $\mathcal{R}'$.

On a alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{f_1} + y\overrightarrow{f_2} + z\overrightarrow{f_3} & (1) \\ \overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{f_1} + y'\overrightarrow{f_2} + z'\overrightarrow{f_3} & (2) \end{cases}$$

En calculant $(1) - (2)$, on obtient :

$$\overrightarrow{OO'} = (x - x')\overrightarrow{f_1} + (y - y')\overrightarrow{f_2} + (z - z')\overrightarrow{f_3}.$$

En posant P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix},$$

[illegible] a :

$$\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

1) Résolvons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 & (1) \\ x + y + z = -3 & (2) \end{cases}$$

(1) − (2) donne $2z = 4$ soit $z = 2$ et $x + y = -5$.

Les équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$ sont :

$$\boxed{\begin{cases} x = -y - 5 \\ y = y \\ z = 2 \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R}.}$$

Les équations canoniques de $\mathcal{D}_1$ sont :

$$\boxed{\frac{x+5}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0}.}$$

2) Le plan $(\mathcal{P})$ a pour vecteur normal, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, par exemple:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, dire que $M(X,Y,Z)$ appartient à $\mathcal{P}$ signifie que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} X + 1 \\ Y - 1 \\ Z - 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire : $-X-1+Y-1=0$, soit :

$$\mathcal{P}: -X+Y-2=0.$$

3) a) Donnons les équations paramétriques de $\mathcal{D}_2$:

$$\begin{cases} x = \lambda - 2 \\ y = \lambda \\ z = \alpha\lambda + 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $-x+y-z=-(\lambda-2)+\lambda-2=0$.

Donc $\mathcal{D}_2$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

b) Prenons un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, par exemple: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$, par exemple: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Soit $A(-2,0,1)$ appartenant à $\mathcal{D}_1$ et $B(-5,0,2)$ appartenant à $\mathcal{D}_2$.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes si et seulement si $\det\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{AB}\right)=0$

On a donc: $\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = -(2+3\alpha)=0$, soit $\alpha = \frac{-2}{3}$.

Exercice 9

1) La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, par exemple:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les équations paramétriques de $\mathcal{D}$ sont :

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Les équations canoniques de $\mathcal{D}$ sont :

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}.$$

2) On a :

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix}.$$

Un point $M(X,Y,Z)$ appartient à $\mathcal{P}_1$ si et seulement si :

$$\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0.$$

Calculons $\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$:

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) &= \begin{vmatrix}X-1 & 1 & -1\\ Y-2 & -3 & -1\\ Z-3 & -1 & -5\end{vmatrix},\ L_2\leftarrow L_2+L_3\\ &= \begin{vmatrix}X-1 & 0 & -1\\ Y-2 & -4 & -1\\ Z-3 & -6 & -5\end{vmatrix}\\ &=(X-1)\begin{vmatrix}-4 & -1\\ -6 & -5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}Y-2 & -4\\ Z-3 & -6\end{vmatrix}\\ &=(X-1)\begin{vmatrix}-4 & -1\\ -6 & -5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}Y-2 & -4\\ Z-3 & -6\end{vmatrix}\\ &=14X+6Y-4Z-14=0.\end{aligned}$$

L'équation normale du plan $\mathcal{P}_1$ est donnée par :

$$7X+3Y-2Z-7=0.$$

3) Le plan $\mathcal{P}_2$ contient $\mathcal{D}_1$ et est parallèle à $\mathcal{D}_2$. Deux vecteurs directeurs indépendants de $\mathcal{P}_2$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, par exemple :

$$\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}.$$

De plus, le point E de coordonnées $E(2,1,-1)$ est un point de $\mathcal{P}_2$.

On en déduit que les équations paramétriques de $\mathcal{P}_2$ sont :

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda + 3\mu \\ y = 1 + 2\lambda - 2\mu \\ z = -1 + \lambda + 5\mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 10

1) La droite $\mathcal{D}$ passe par le point A' de coordonnées $A'(1, 0, -3)$ et elle a pour vecteur directeur : $\vec{v} = (2, -3, -1)$.

Un point $M(X, Y, Z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\det(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{AA'}, \vec{v}) = 0.$$

On a :

$$\overrightarrow{A'M} = \begin{pmatrix} X - 1 \\ Y \\ Z + 3 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

donc :

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{AA'}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 2 \\ Y & -1 & -3 \\ Z+3 & -4 & -1 \end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
&= \begin{vmatrix} X+Y-1 & 0 & -1 \\ Y & -1 & -3 \\ Z+3 & -4 & -1 \end{vmatrix}, L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\
&= \begin{vmatrix} X+Y-1 & 0 & -1 \\ Y & -1 & -3 \\ Z-4Y+3 & 0 & 11 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} X+Y-1 & -1 \\ Z-4Y+3 & 11 \end{vmatrix} \\
&= -11(X+Y-1) - (Z-4Y+3) \\
&= -11X - 7Y - Z + 8 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation du plan $\mathcal{P}$ est : $11X + 7Y + Z - 8 = 0$.

2) Les coordonnées de B vérifient l'équation du plan $\mathcal{P}$ trouvée précédemment.

Recherche de l'équation du plan $\mathcal{P}'$:

Le plan $\mathcal{P}'$ est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$, donc le plan $\mathcal{P}'$ a pour vecteur normal tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$. On choisit : $\vec{n} = (2, -3, -1)$ comme vecteur normal de $\mathcal{P}'$.

L'équation du plan $\mathcal{P}'$ est :

$$2X - 3Y - Z + \alpha = 0.$$

On sait que le point $B(1, -1, 4)$ appartient à $\mathcal{P}'$, donc :

$$2 + 3 - 4 + \alpha = 0,$$

soit : $\alpha = -1$.

L'équation du plan $\mathcal{P}'$ est : $\boxed{2X - 3Y - Z - 1 = 0.}$

3) On résout le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 11X + 7Y + Z - 8 = 0 & (1) \\ 2X - 3Y - Z - 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

En calculant (1)+(2), on obtient : $13X + 4Y - 9 = 0$.

On a donc :

$$\begin{cases} 11X + 7Y + Z - 8 = 0 \\ 13X + 4Y - 9 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X = \dfrac{9}{13} - \dfrac{4}{13}Y \\ Y = Y \\ Z = \dfrac{5}{13} - \dfrac{47}{13}Y \end{cases}, Y \in \mathbb{R}.$$

Les équations canoniques de $\mathcal{D}'$ sont donc :

$$\frac{13X - 9}{-4} = \frac{Y}{1} = \frac{13Z - 5}{-47}.$$

4) Écrivons les équations canoniques de $\mathcal{D}$ sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche donc un point $M(1+2\lambda, -3\lambda, -3-\lambda)$ de $\mathcal{D}$ tel que $\|BM\|$ soit minimale. Cela revient à chercher $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM}$ soit orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

On a :

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1-3\lambda \\ -7-\lambda \end{pmatrix}.$$

Or $\overrightarrow{BM}.\vec{v} = 0$, c'est-à-dire :

$$2(2\lambda) - 3(1-3\lambda) - (-7-\lambda) = 0,$$

ou encore :

$$\lambda = \frac{-2}{7}.$$

Les coordonnées du point M cherché sont donc : $M\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{-19}{7}\right)$.

Exercice 11

1) Cherchons tout d'abord les équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$.

Le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+z-1=0 & (1) \\ 2x-y-z-3=0 & (2) \end{cases}$$

devient :

$$\begin{cases} x = x \\ y = 4-3x \\ z = -7+5x \end{cases}, x \in \mathbb{R}.$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, de plus, le point $A(0,4,-7)$ est un point de $\mathcal{D}_1$.

De même, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, de plus, le point $B(0,1,-1)$ est un point de $\mathcal{D}_2$.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)=0$.

On calcule donc $\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)$:

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 6 & 5 & \alpha \end{vmatrix}, L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & \alpha+4 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & \alpha+4 \end{vmatrix} = 3(\alpha+7).\end{aligned}$$

Les droites sont concourantes pour $\alpha=-7$.

Déterminons maintenant les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$:

Notons λ le réel défini par :

$$\lambda=\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{\alpha}.$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x=3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-1-7\lambda. \end{cases}$$

Remplaçons ces résultats dans les équations qui forment $\mathcal{D}_1$:

On trouve : $2x-y-z-3=2(3\lambda)-(1+2\lambda)-(-1-7\lambda)-3=0$, soit $\lambda=\dfrac{11}{3}$.

Le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ a pour coordonnées : $K\left(11,\dfrac{25}{3},-\dfrac{80}{3}\right)$.

2 Soit $M(X,Y,Z)$ un point du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Alors la famille $\left\{\overrightarrow{AM},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right\}$ est liée. De plus $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix} X \\ Y-4 \\ Z+7 \end{pmatrix}$.

On a donc $\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)=0$, c'est-à-dire :

$$\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)=\begin{vmatrix} X & 1 & 3 \\ Y-4 & -3 & 2 \\ Z+7 & 5 & -7 \end{vmatrix}=0.$$

Par ailleurs :

$$\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right) = \begin{vmatrix} X & 1 & 3 \\ Y-4 & -3 & 2 \\ Z+7 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= X(21-10)-(Y-4)(-7-15)+(Z+7)(2+9)$$

$$= 11X+22(Y-4)+11(Z+7)$$

$$= 11X+22Y+11Z-11.$$

L'équation du plan $\mathcal{P}$ est donc : $X+2Y+Z-1=0$.

3) La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, donc tout vecteur normal de $\mathcal{P}$ est vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Choisissons par exemple : $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, comme vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Le point $N(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{MN}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{MN}=\lambda\vec{n}$.

On obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x-5=\lambda \\ y+4=2\lambda \\ z-1=\lambda. \end{cases}$$

Les équations paramétriques de $\mathcal{D}$ sont donc :

$$\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-4+2\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

maths

Chapitre 10

Sujets d'examen

1. Sujet n° 1

a) Énoncé

Questions de cours :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension fini.

Soit u un endomorphisme de E.

1) Donner la définition du polynôme caractéristique de u.

2) Montrer que λ est une valeur propre de u si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique de u.

3) Montrer que si $\ker\left(u^i\right) = \ker\left(u^{i+1}\right)$ alors $\ker\left(u^{i+1}\right) = \ker\left(u^{i+2}\right)$ où i est un entier naturel non nul.

Exercice 1

1) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est égal à :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2).$$

2) Pour quelle valeur de a la matrice A est-elle diagonalisable?

3) Pour $a = 3$,

   a) diagonaliser la matrice A.

   b) Résoudre l'équation de récurrence linéaire: $X_{n+1} = AX_n$.

Exercice 2

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3.$$

2) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

3) Déterminer une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.

4) Calculer le polynôme minimal de A et en déduire l'expression de A^{-1} et de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) Résoudre le système différentiel $\dfrac{dX}{dt} = AX$.

Exercice 3

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ semblable à la matrice B suivante:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de A et le déterminant de A.

2) La matrice A est-elle diagonalisable?

3) Déterminer $\dim\ker(A-2I)$, $\dim\ker(A-2I)^2$, $\dim\ker(A-2I)^3$, $\dim\ker(A-2I)^{2004}$.

4) Donner le polynôme minimal de A.

b) Corrigé

Questions de cours :

1) Le polynôme caractéristique d'une matrice A est le polynôme P défini par :
$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

2) • Soit λ une valeur propre de la matrice A. Il existe, par définition, un vecteur non nul $x \in E$ tel que :
$$Ax = \lambda x.$$

Cette relation peut s'écrire :
$$(A - \lambda I)x = 0 \quad \text{avec} \quad x \neq 0,$$

ceci signifie que le système $(A - \lambda I)$ est non inversible, donc que $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ainsi, la valeur propre λ est racine du polynôme caractéristique.

• La réciproque se démontre avec les mêmes arguments.

3) Supposons que, pour un entier i donné, on a : $\ker u^i = \ker u^{i+1}$.
$$\ker u^{i+1} \subset \ker u^{i+2}$$

Soit $x \in \ker u^{i+1}$.

On a alors :
$$u^{i+1}(x) = 0,$$

c'est-à-dire :
$$u\left(u^{i+1}(x)\right) = u(0) = 0,$$

soit :
$$u^{i+2}(x) = 0.$$

• $\ker u^{i+2} \subset \ker u^{i+1}$

Soit $x \in \ker u^{i+2}$.

On a alors :
$$u^{i+2}(x) = 0,$$

c'est-à-dire :
$$u^{i+1}(u(x)) = 0.$$

Ainsi, le vecteur $u(x)$ appartient à $\ker\left(u^{i+1}\right)$.

En utilisant l'hypothèse :
$$\ker u^i = \ker u^{i+1},$$

on en déduit que :

$$u(x) \in \ker u^i,$$

soit :

$$u^{i+1}(x) = u^i\left(u(x)\right) = 0.$$

Ainsi, $x \in \ker u^{i+1}$.

Exercice 1

1) Le calcul du polynôme caractéristique donne :

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & a & -4 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}, L_2 \leftarrow L_2 - L_4$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & a & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_4$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & a-1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & a-1 & -4 \\ 2 & 2 & -4-\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda+1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= \lambda(\lambda+1)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -2-\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2).$$

2) Les valeurs propres de A sont : $-2, -1, 0$.

Comme les valeurs propres -2 et -1 sont de multiplicité 1 dans le polynôme caractéristique, on a forcement $\dim\ker(A+2I) = 1$ et $\dim\ker(A+I) = 1$. Le fait que A soit diagonalisable ou pas vient alors de l'étude de $\dim\ker A$: A est diagonalisable si et seulement si $\dim\ker A = 2$.

Étudions donc $\ker A$ et $\dim \ker A$.

Soit $(x,y,z,t) \in \ker(A)$. On a alors :

$$\begin{cases} 2x + ay - 4z - t = 0 \\ y - t = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \\ 2y - 2t = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss donne successivement :

$$\begin{cases} 2x + ay - 4z - t = 0 \\ y - t = 0 \\ (2-a)y + t = 0 \\ 2y - 2t = 0, \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} 2x + ay - 4z - t = 0 \\ y - t = 0 \\ (2-a)y + t = 0. \end{cases}$$

Deux cas se présentent alors, suivant que $2 - a = -1$ ou que $2 - a \neq -1$.

- 1er cas : $a = 3$.

  Le système linéaire devient alors :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z - t = 0 \\ y - t = 0, \end{cases}$$

  c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = 2z - t \\ y = t \\ z = z \\ t = t \end{cases}, (z,t) \in \mathbb{R}^2.$$

  Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est donné par :

$$\ker(A) = vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Dans ce cas, comme $\dim\ker(A) = 2$, alors la matrice A est diagonalisable.

- 2e cas : $a \neq 3$.

  Le système linéaire devient alors :

$$\begin{cases} 2x + ay - 4z - t = 0 \\ y - t = 0 \\ (2+a)y + t = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2x + ay - 4z - t = 0 \\ (2-a)y + t = 0 \\ y - t = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 2x + ay - 4z - t = 0 \\ (2-a)y + t = 0 \\ (3-a)y = 0. \end{cases}$$

Comme $a \neq 3$, on a forcement : $y = 0$ et :

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \\ z = z \\ t = 0 \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, comme $\dim\ker(A) = 1 \neq 2$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable.

3) a) Dans cette question, $a = 3$, donc A est diagonalisable.

- Étude de $\ker A$:

  D'après la question précédente, on a :

$$\ker A = vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude de $\ker(A+I)$:

  Soit $(x,y,z,t) \in \ker(A+I)$. On a alors :

$$\begin{cases} 3x+3y-4z-t=0 \\ 2y-t=0 \\ 2x+2y-3z=0 \\ 2y-t=0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 3x+3y-4z-t=0 & (1) \\ 2x+2y-3z=0 & (2) \\ 2y-t=0 & (3) \end{cases}$$

(2) donne : $2x+2y=3z$. En remplaçant dans (1), on obtient : $\frac{9}{2}z-4z-t=0$

soit $z-2t=0$.

On en déduit que :

$$\begin{cases} x=5y \\ y=y \\ z=4y \\ t=2y \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

Ainsi :

$$\ker(A+I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Étude de $\ker(A+2I)$:

  Soit $(x,y,z,t) \in \ker(A+2I)$. On a alors :

$$\begin{cases} 4x+3y-4z-t=0 \\ 3y-t=0 \\ 2x+2y-3z=0 \\ 2y=0. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne :

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z = z \\ t = 0 \end{cases}, \ z \in \mathbb{R}.$$

Ainsi :

$$\ker(A+2I) = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Posons P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de cette matrice est donnée par :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \Delta.$$

b) Calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}$:

On a :

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
A^n &= P\Delta^n P^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & 5(-1)^{n+1}+(-2)^n & -(-2)^{n+1} & 5(-1)^n+(-2)^{n+1} \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 & (-1)^n \\ (-2)^{n+1} & 4(-1)^{n+1}+(-2)^n & -(-2)^{n+1} & 4(-1)^n+(-2)^{n+1} \\ 0 & 2(-1)^{n+1} & 0 & 2(-1)^n \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

puis que :

$$X_n = A^n X_0.$$

Exercice 2

1) Le calcul du polynôme caractéristique donne :

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3\\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda & 1-\lambda & 2 \\ \lambda & -1 & -\lambda \end{vmatrix}\\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2\\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3.
\end{aligned}
$$

2) Si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice P inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

On aurait ainsi :

$$A = 0,$$

ce qui est une contradiction. Donc A n'est pas diagonalisable.

3) On pose $M = A - 0I = A$.

On peut voir que $rg(M) = 2$ et donc que $\dim \ker M = 1$.

Calculons :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

et :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La réduite de Jordan de A comporte donc un bloc de taille 3.

Construisons une base associée à cette réduction :

Prenons

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(M^3) \setminus \ker(M^2),$$

puis

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

enfin

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Posons P la matrice de passage définie :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J.$$

4) Vu que, le plus grand bloc dans la réduite de Jordan de A est de taille 3, le polynôme minimal de A est donné par :

$$m_A(X) = X^3.$$

- La matrice A n'est pas inversible puisque 0 est valeur propre.
- Calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}^*$:

  Comme $m_A(A) = 0$, on en déduit que :

  $$A^3 = 0,$$

  et par suite :

  $$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\},\ A^n = 0.$$

  Il reste maintenant à calculer A^2.
- Calcul de A^2 :

  On a, par simple calcul :

  $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5) Résolution du système différentiel : $\dfrac{dX}{dt} = AX$.

- Calculons e^{tA}.

  Vu que :

  $$A = PJP^{-1},$$

  alors, on a :

  $$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

  De plus,

  $$e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1-t+t^2 & t & t^2 \\ t+t^2 & 1+t & 2t+t^2 \\ t-t^2 & -t & 1-t^2 \end{pmatrix}.$$

- La solution du système différentiel est donnée par :
$$X(t) = e^{tA}U_0,$$
où U_0 est la condition initiale.

Exercice 3

1) Comme les matrices A et B sont semblables, elles ont le même déterminant et les mêmes valeurs propres. La matrice A admet donc une unique valeur propre : 2. De plus, son déterminant est $\det A = 2^5 = 32$.
2) La matrice B n'est pas diagonalisable, puisque B représente la réduite de Jordan de A. Comme A et B sont semblables, la matrice A n'est pas diagonalisable.
3) La matrice B possède de blocs de Jordan. La taille du bloc le plus grand est 3.
   - Étude de $\dim\ker(A-2I)$:
     La quantité $\dim\ker(A-2I)$ représente le nombre de blocs de Jordan. Donc :
     $$\dim\ker(A-2I) = 2.$$
   - Étude de $\dim\ker(A-2I)^3$:
     Vu que la taille du bloc de Jordan le plus grand est 3, alors $\dim\ker(A-2I)^3$ représente la multiplicité de la valeur propre 2 dans le polynôme caractéristique. Ainsi :
     $$\dim\ker(A-2I)^3 = 5.$$
   - Étude de $\dim\ker(A-2I)^2$:
     Vu que :
     $$\ker(A-2I) \subsetneq \ker(A-2I)^2 \subsetneq \ker(A-2I)^3,$$
     alors $2 < \dim\ker(A-2I)^2 < 5$, soit $\dim\ker(A-2I)^2 = 3$ ou 4.
     Calculons $(B-2I)^2$:
     $$(B-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $rg(B-2I)^2=1$, on en déduit que:
$$\dim\ker(B-2I)^2=\dim\ker(A-2I)^2=4.$$

- Étude de $\dim\ker(A-2I)^{2004}$:

Comme
$$\ker(A-2I)^3\subset\ker(A-2I)^{2004}\subset\mathbb{R}^5,$$

alors:
$$5=\dim\ker(A-2I)^3\leq\dim\ker(A-2I)^{2004}\leq\dim\mathbb{R}^5,$$

c'est-à-dire: $5\leq\dim\ker(A-2I)^{2004}\leq 5$, soit
$$\dim\ker(A-2I)^{2004}=5.$$

4) Le polynôme minimal de A est donné par:
$$m_A(X)=(X-2)^p,$$

où p représente la taille du bloc de Jordan le plus grand associé à la valeur propre 2, c'est-à-dire $p=3$.

Finalement, le polynôme minimal de A est donné par:
$$m_A(X)=(X-2)^3.$$

2. Sujet n° 2

a) Énoncé

Questions de cours

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.

1) Donner la définition du dual E^* de E.

2) Si B est une base de E, qu'appelle-t-on base duale B^* de B? Quelles sont les composantes d'un élément φ de E^* dans la base B^*?

3) Soient u et v deux endomorphismes de E. Donner la définition de ${}^t u$ et montrer que:
$${}^t(u\circ v)={}^t v\circ{}^t u.$$

Exercice 1

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que $P_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(16-\lambda)$.
2) Diagonaliser A. En particulier, déterminer une matrice $\tilde{P}$ inversible telle que $\tilde{P}^{-1}A\tilde{P}$ est une matrice diagonalisable D.
3) Calculer $\tilde{P}^T\tilde{P}$ et en déduire une matrice P inversible telle que $P^{-1} = P^T$ et $P^T AP = D$.
4) Déterminer une matrice symétrique M telle que $M^2 = A$.
5) Vérifier que, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X^T X \geq 0$ et que
$$X^T X = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$
6) A l'aide de 4) et 5), montrer que, pour tout X dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X^T AX \geq 0$.
7) Résoudre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $X^T AX = 0$.

Exercice 2

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique P_A de A.
2) En utilisant les matrices données ci-dessous, calculer $\dim\left(\ker(A-I)^i\right)$ et $\dim\left(\ker(A-2I)^i\right)$ pour $i = 1, 2, 3$.
3) Justifier que A n'est pas diagonalisable.
4) Déterminer une réduite de Jordan de A.
5) Déterminer le polynôme minimal de A.

On donne :

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

et :

$$(A-I)^3=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & 6 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$(A-I)^3=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Exercice 3

On considère $E = \mathbb{R}^3$ et on note φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires définies sur E par

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 2x_3,$$
$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = -4x_1 + x_2 + x_3.$$

1) Montrer que $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base de E^*.
2) Déterminer une base B de E telle que B^* soit une base duale de B.
3) Soit u l'endomorphisme de E défini par :
$$u(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3).$$
   a) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de E puis la matrice de ${}^t u$ dans la base duale canonique.
   b) Déterminer la matrice de ${}^t u$ dans la base B^* et préciser ${}^t u(\varphi_1)$, ${}^t u(\varphi_2)$ et ${}^t u(\varphi_3)$

Traiter au choix un des deux exercices ci-dessous.

Exercice 4

1) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ contenant la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$
et le point $A(1,1,0)$.
2) Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations normales :
$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases} ; \mathcal{D}_2 : \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$
sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ?

Exercice 5

1) Montrer que les points de $\mathcal{E}_3$, de coordonnées affines
$$A(1,1,1), B(3,-1,4), C(0,7,-3) \text{ et } D(5,7,2)$$
sont coplanaires.

2) Considérons $R' = \left(M, \vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{f_4}\right)$ un repère cartesien quelconque de $\mathcal{E}_3$ et trois points M_1, M_2, M_3 de coordonnées respectives dans R' : $(1,-\alpha,3)$, $(\alpha,-1,1)$ et $(3,1,-1)$. déterminer α pour que les points M, M_1, M_2, M_3 soient coplanaires.

b) Corrigé

Questions de cours

1) E^* est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

2) Notons $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. La base duale B^* de B, notée $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, est définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,..,n\} \times \{1,..,n\},\ e_i^*\left(e_j\right) = \delta_{ij}.$$

On a alors :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \varphi(e_1)e_1^*(x) + \dots + \varphi(e_n)e_n^*(x).$$

3) Si $u \in \mathcal{L}(E,E)$, alors ${}^t u$ est l'élément de $\mathcal{L}(E^*, E^*)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \forall f \in E^*,\ \langle {}^t u(f), x\rangle = \langle f, u(x)\rangle.$$

Soient $f \in E^*$ et $x \in E$.

On sait que :

$$\langle {}^t(u \circ v)(f), x\rangle = \langle f, (u \circ v)(x)\rangle.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle {}^t(u \circ v)(f), x\rangle &= \langle f, (u \circ v)(x)\rangle \\ &= \langle f, u\left(v(x)\right)\rangle \\ &= \langle {}^t u(f), v(x)\rangle \\ &= \langle \left({}^t v \circ {}^t u\right)(f), x\rangle. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\langle {}^t(u \circ v)(f) - \left({}^t v \circ {}^t u\right)(f), x\rangle = 0.$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout x dans E, on obtient :

$${}^t(u \circ v)(f) - \left({}^t v \circ {}^t u\right)(f) = 0,$$

soit :

$${}^t(u \circ v)(f) = \left({}^t v \circ {}^t u\right)(f).$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout $f \in E^*$, on en déduit que :

$${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u.$$

Exercice 1

1) On calcule :

$$\det\begin{pmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 11-\lambda & 0 & 5 \\ -5 & -\lambda & -3 \\ 5 & -\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 11-\lambda & 0 & 5 \\ -5 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}, L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 11-\lambda & 0 & 5 \\ -10 & 0 & -6+\lambda \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 11-\lambda & 5 \\ -10 & -6+\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 16-\lambda & 5 \\ -16+\lambda & -6+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(16-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -6+\lambda \end{vmatrix} = \lambda(16-\lambda)(\lambda-1)$$

$$= -\lambda(1-\lambda)(16-\lambda).$$

2) • Déterminons une base de $\ker A$.

$$\begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 3z = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y\,,\ y \in \mathbb{R}. \\ z = y \end{cases}$$

On en déduit que $\ker A$ est défini par :

$$\ker A = vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Déterminons une base de $\ker(A - I)$.

$$\begin{cases} 10x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système par la méthode du pivot de Gauss donne :

$$\begin{cases} 10x - 5y + 5z = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 10x - 5y + 5z = 0 \\ y = -z, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -z\,,\ z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

On en déduit que $\ker(A - I)$ est défini par :

$$\ker(A - I) = vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Déterminons une base de $\ker(A-16I)$:

$$\begin{cases} -5x-5y+5z=0 \\ -5x-13y-3z=0 \\ 5x-3y-13z=0. \end{cases}$$

La résolution de ce système par la méthode du pivot de Gauss donne:

$$\begin{cases} -5x-5y+5z=0 \\ \quad -8y-8z=0 \\ \quad -8y-8z=0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -5x-5y+5z=0 \\ \quad y+z=0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x=2z \\ y=-z,\ z\in\mathbb{R}. \\ z=z \end{cases}$$

On en déduit que $\ker(A-16I)$ est défini par :

$$\ker(A-16I)=vect\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

On définit la matrice $\tilde{P}$ par :

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

et on a :

$$\tilde{P}^{-1}A\tilde{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}=D.$$

3) On calcule :

$$\tilde{P}^T \tilde{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

On pose alors P, la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Avec ce choix de P, on a bien :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = P^T,$$

et :

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = D.$$

4) On a :

$$\begin{aligned} A = PDP^T \quad &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} P^T \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^T \\ &= \left[P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^T \right] \times \left[P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^T \right] \\ &= M^2, \end{aligned}$$

où on a défini :

$$M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^T,$$

c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Par simple calcul, on a :

$$X^T X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

On vérifie aisément que :

$$\begin{cases} X^T X \geq 0 \\ X^T X = 0 \Leftrightarrow X = 0. \end{cases}$$

6) On écrit que :

$$X^T AX = X^T M^2 X = X^T M \times MX,$$

soit, puisque M est une matrice symétrique,

$$X^T AX = X^T M^T \times MX = (MX)^T (MX).$$

En posant $Y = MX$, et en utilisant la question précédente, on obtient :

$$X^T AX = (MX)^T (MX) = Y^T Y \geq 0.$$

7) En posant de la même façon que précédemment $Y = MX$, on obtient :

$$X^T AX = 0 \Leftrightarrow Y^T Y = 0,$$

c'est-à-dire :

$$X^T AX = 0 \Leftrightarrow Y = 0,$$

soit :

$$X^T AX = 0 \Leftrightarrow MX = 0,$$

ou encore :

$$X^T AX = 0 \Leftrightarrow X \in \ker M = vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 2

1) Par calculs, on obtient :

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^5(1-\lambda)^2.$$

2) • Déterminons $\dim\ker(A-I)$:

On a : $rg(A-I)=6$, c'est-à-dire, par le théorème du rang, $\dim\ker(A-I)=1$.

• Déterminons $\dim\ker(A-I)^2$:

On a : $rg(A-I)^2=5$, c'est-à-dire, par le théorème du rang, $\dim\ker(A-I)^2=2$.

• Déterminons $\dim\ker(A-I)^3$:

On a $\dim\ker(A-I)^3=\dim\ker(A-I)^2=2$.

• Déterminons $\dim\ker(A-2I)$:

On a : $rg(A-2I)=5$, c'est-à-dire, par le théorème du rang, $\dim\ker(A-2I)=2$.

• Déterminons $\dim\ker(A-2I)^2$:

On a : $rg(A-2I)^2=3$, c'est-à-dire, par le théorème du rang, $\dim\ker(A-2I)^2=4$.

• Déterminons $\dim\ker(A-2I)^3$:

On a : $rg(A-2I)^3=2$, c'est-à-dire, par le théorème du rang, $\dim\ker(A-2I)^3=5$.

3) Vu que $\dim\ker(A-I)=1\neq 2$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

4) Comme $\dim\ker(A-I)=1$ et $\dim\ker(A-I)^2=2$, alors la réduite de Jordan comporte un seul bloc de Jordan relativement à la valeur propre 1 de taille 2.

De plus, comme $\dim\ker(A-2I)=2$, $\dim\ker(A-2I)^2\neq 5$ et $\dim\ker(A-I)^3=5$, alors la réduite de Jordan comporte deux blocs de Jordan relativement à la valeur propre 2, le plus grand des ces deux blocs étant de taille 3.

On en déduit que la réduite de Jordan de la matrice A est :

$$J=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}} & & (0)\\ & \boxed{\begin{matrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{matrix}} & \\ (0) & & \boxed{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}}\end{pmatrix}.$$

5) Le polynôme minimal de A est donnée par :

$$m_A(X)=(X-1)^2(X-2)^3.$$

Exercice 3

1) Soient α,β et γ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\ \alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)+\gamma\varphi_3(x)=0.$$

Montrons que $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Prenons $x=(1,0,0)$. On a alors:

$$\alpha+\beta-4\gamma=0.$$

Prenons $x=(0,1,0)$. On a alors:

$$-\alpha+\beta+\gamma=0.$$

Prenons $x=(0,0,1)$. On a alors:

$$\alpha-2\beta+\gamma=0.$$

On en déduit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases}\alpha+\beta-4\gamma=0\\ -\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha-2\beta+\gamma=0.\end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire par la méthode de Gauss donne successivement :

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 4\gamma = 0 \\ 2\beta - 3\gamma = 0 \\ -3\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 4\gamma = 0 \\ 2\beta - 3\gamma = 0 \\ \dfrac{1}{3}\gamma = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et donc que la famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est libre. De plus, $\dim \mathit{vect}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, donc $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base de E^*.

2) Cherchons un vecteur de coordonnées (x, y, z) tel que :

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 1 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \\ \varphi_3(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

On obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \\ -4x + y + z = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$(x, y, z) = (3, 7, 5).$$

De la même façon, cherchons un vecteur de coordonnées (x, y, z) tel que :

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 1 \\ \varphi_3(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

On obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \\ -4x + y + z = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$(x,y,z)=(2,5,3).$$

Enfin, cherchons un vecteur de coordonnées (x,y,z) tel que :

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=0\\ \varphi_2(x,y,z)=0\\ \varphi_3(x,y,z)=1.\end{cases}$$

On obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases}x-y+z=0\\ x+y-2z=0\\ -4x+y+z=1.\end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne :

$$(x,y,z)=(1,3,2).$$

La base $\mathcal{B}$ duale de $\mathcal{B}^*$ est donc :

$$\left\{u_1=\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix};\ u_2=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix};\ u_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

3) a) Notons $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$ la base duale canonique, c'est-à-dire la base duale de $\{e_1,e_2,e_3\}$.

La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$\mathcal{M}at_{\{e_1,e_2,e_3\}}(u)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

La matrice de ${}^t u$ dans la base duale canonique est donnée par :

$$\mathcal{M}at_{\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}}({}^t u)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

b) En utilisant les notations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases}\varphi_1=e_1^*-e_2^*+e_3^*\\ \varphi_2=e_1^*+e_2^*-2e_3^*\\ \varphi_3=-4e_1^*+e_2{}^*+e_3^*.\end{cases}$$

Posons donc P la matrice de passage de la base canonique duale $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ à la base B^* définie par :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{array} \end{array}$$

On en déduit que :

$$P^{-1} \times \mathcal{M}at_{\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}}({}^t u) \times P = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -30 \\ 10 & 1 & -20 \\ 6 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que :

$$\begin{cases} {}^t u(\varphi_1) = 16\varphi_1 + 10\varphi_2 + 6\varphi_3 \\ {}^t u(\varphi_2) = \varphi_2 \\ {}^t u(\varphi_3) = -30\varphi_1 - 20\varphi_2 - 11\varphi_3. \end{cases}$$

Vérifions ces expressions :

Pour cela, prenons x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3). On a alors :

$$u(x) = (2x_1 + x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + 2x_2 + x_3)e_2 + (x_1 + x_2 + 2x_3)e_3.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} {}^t u(\varphi_2)(x) &= \langle {}^t u(\varphi_2), x \rangle \\ &= \langle \varphi_2, u(x) \rangle \\ &= \varphi_2(u(x)) \\ &= \left(e_1^* + e_2^* - 2e_3^*\right)\big((2x_1 + x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + 2x_2 + x_3)e_2 \\ &\qquad + (x_1 + x_2 + 2x_3)e_3\big) \\ &= 2x_1 + x_2 + x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3 - 2(x_1 + x_2 + 2x_3) \\ &= 2x_1 + x_2 + x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ &= x_1 + x_2 - 2x_3 \\ &= \varphi_2(x). \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
{}^t u(\varphi_1)(x) &= \langle {}^t u(\varphi_1), x\rangle \\
&= \langle \varphi_1, u(x)\rangle \\
&= \varphi_1(u(x)) \\
&= \left(e_1^* - e_2^* + e_3^*\right)\big((2x_1 + x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + 2x_2 + x_3)e_2 \\
&\qquad + (x_1 + x_2 + 2x_3)e_3\big) \\
&= 2x_1 + x_2 + x_3 - (x_1 + 2x_2 + x_3) + x_1 + x_2 + 2x_3 \\
&= 2x_1 + x_2 + x_3 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_1 + x_2 + 2x_3 \\
&= 2x_1 + 2x_3,
\end{aligned}$$

résultat que l'on compare à :

$$\begin{aligned}
(16\varphi_1 + 10\varphi_2 + 6\varphi_3)(x) &= 16\varphi_1(x_1, x_2, x_3) + 10\varphi_2(x_1, x_2, x_3) + 6\varphi_3(x_1, x_2, x_3) \\
&= 16(x_1 - x_2 + x_3) + 10(x_1 + x_2 - 2x_3) \\
&\qquad + 6(-4x_1 + x_2 + x_3) \\
&= 16x_1 - 16x_2 + 16x_3 + 10x_1 + 10x_2 - 20x_3 \\
&\qquad - 24x_1 + 6x_2 + 6x_3 \\
&= 2x_1 + 2x_3.
\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
{}^t u(\varphi_3)(x) &= \langle {}^t u(\varphi_3), x\rangle \\
&= \langle \varphi_3, u(x)\rangle \\
&= \varphi_3(u(x)) \\
&= \left(-4e_1^* + e_2^* + e_3^*\right)\big((2x_1 + x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + 2x_2 + x_3)e_2 \\
&\qquad + (x_1 + x_2 + 2x_3)e_3\big) \\
&= -4(2x_1 + x_2 + x_3) + (x_1 + 2x_2 + x_3) + (x_1 + x_2 + 2x_3) \\
&= -8x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3 + x_1 + x_2 + 2x_3 \\
&= -6x_1 - x_2 - x_3,
\end{aligned}$$

résultat que l'on compare à :

$$\begin{aligned}
(-30\varphi_1 - 20\varphi_2 - 11\varphi_3)(x) &= -30(x_1 - x_2 + x_3) - 20(x_1 + x_2 - 2x_3) \\
&\qquad - 11(-4x_1 + x_2 + x_3) \\
&= -30x_1 + 30x_2 - 30x_3 - 20x_1 - 20x_2 + 40x_3 \\
&\qquad + 44x_1 - 11x_2 - 11x_3 \\
&= -6x_1 - x_2 - x_3.
\end{aligned}$$

Exercice 4

1) La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $B(0,-1,1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}=(1,2,3)$.

Un point $M(X,Y,Z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si:

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0,$$

c'est-à-dire, si et seulement si:

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM},\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix} -1 & X-1 & 1 \\ -2 & Y-1 & 2 \\ 1 & Z & 3 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1+C_2 \\
&= \begin{vmatrix} 0 & X-1 & 1 \\ 0 & Y-1 & 2 \\ 4 & Z & 3 \end{vmatrix} \\
&= 4\begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ Y-1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 8X-8-4Y+4=0.
\end{aligned}$$

L'équation du plan $\mathcal{P}$ est donc:

$$2X-Y-1=0.$$

2) • Déterminons les équations paramètriques de $\mathcal{D}_1$.

On a:

$$\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$$

soit:

$$\begin{cases} x=\dfrac{-3}{2}-t \\ y=t \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

• Déterminons les équations paramètriques de $\mathcal{D}_2$.

On a:

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

soit :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \dfrac{7}{2} - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

i) Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ étaient sécantes, alors on aurait :
$$z = \frac{7}{2} - t = \frac{1}{2},$$

soit :
$$t = 3.$$

En remplaçant cette valeur dans les autres équations, on obtiendrait :
$$x = 3 = \frac{-9}{2}\,!$$

On en déduit que les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas sécantes.

ii) Les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, puisqu'elles n'ont pas des vecteurs directeurs colinéaires.

iii) Comme les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont ni parallèles, ni sécantes, elles ne sont par conséquent pas coplanaires.

Exercice 5

1) Les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont :
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si :
$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si :
$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 6 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -2 & 6 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}, C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & -6 \\ 3 & -4 & 10 \end{vmatrix} \\
&= -5 \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} \\
&= -5(-20+18) = 10 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

2) Calculons :

$$
\overrightarrow{MM_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 3 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{MM_2} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{MM_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

Les points M, M_1, M_2, M_3 sont coplanaires si et seulement si :

$$
\det\left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_3}\right) = 0,
$$

c'est-à-dire :

$$
\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_3}\right) &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ -\alpha & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \alpha+3 & 3 \\ -\alpha & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(\alpha+3) \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(\alpha+3)(\alpha-3).
\end{aligned}
$$

Les points M, M_1, M_2, M_3 sont donc coplanaires si et seulement si $\alpha = -3$ ou $\alpha = 3$.

3. Sujet n° 3

a) Énoncé

Exercice 1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Donner son spectre.
2) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une forme diagonale D et préciser la matrice de passage correspondante.
3) Trouver une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 2

On considère la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ et on écrit tout élément $x \in \mathbb{R}^4$ sous la forme $x = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i$. Soit la forme quadratique $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_4^2 + 2x_1x_3\cos\beta + 2x_2x_3\sin\beta - 4x_3x_4,$$

où α et β sont des paramètres réels.

1) Écrire la matrice associée à $q(.)$ dans la base canonique.
2) Donner une décomposition de $q(.)$ sous forme canonique, selon la méthode de Gauss en précisant aussi une base orthogonale.
3) Déterminer, en fonction de α et β, le rang et la signature de $q(.)$.

Exercice 3

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère les vecteurs:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la dimension et une base orthogonale de $V = vect\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 4

Dans l'espace affine tridimensionnel usuel $\mathcal{E}$, muni du repère affine $\mathcal{R} = \left(0\,;e_1,e_2,e_3\right)$, on considère les droites d'équations :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y = z + 2 \end{cases} ; \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}.$$

1) Déterminer le paramètre réel a tel que les droites D_1 et D_2 soient concourantes.

2) Écrire l'équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par ces deux droites.

Exercice 5

Soit $(E,\langle.,.\rangle)$ un espace vectoriel réel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique.

1) Rappeler la définition d'un endomorphisme antisymétrique. Montrer que la seule valeur propre réelle possible pour f est 0.

2) Soit A la matrice de f dans une base orthonormale de E. On note par I la matrice unité d'ordre n. Montrer que $I + A$ et $I - A$ sont inversibles.

3) Établir que la matrice $Q = (I + A)^{-1}(I - A)$ est orthogonale.

b) Corrigé

Exercice 1

1) Calculons $\det(A - \lambda I)$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 3-\lambda & -\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda+1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(3-\lambda)(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= -(3-\lambda)(\lambda+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda+1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(3-\lambda)(\lambda+1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda+1)^3.$$

Le spectre de A est donc $Sp(A) = \{-1, 3\}$.

2) Cherchons les vecteurs propres de A.

- Recherche du sous espace propre, noté E_{-1}, associé à la valeur propre -1 :

  Ce sous espace a pour équation : $x+y+z+t=0$, ce qui s'ecrit :

$$\begin{cases} x = -y-z-t \\ y = y \\ z = z \\ t = t \end{cases}, (y,z,t) \in \mathbb{R}^3.$$

  Une base de E_{-1} est $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

- Recherche du sous espace propre, noté E_3, associé à la valeur propre 3:

  On résout le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x+y+z+t=0 & (1) \\ x+3y+z+t=0 & (2) \\ x+y+3z+t=0 & (3) \\ x+y+z+3t=0 & (4). \end{cases}$$

$(1)-(2)$ donne $2x-2y=0$, c'est-à-dire : $x=y$.

De même, $(1)-(3)$ donne $2x-2z=0$, c'est-à-dire : $x=z$.

Enfin, $(1)-(4)$ donne $2x-2t=0$, c'est-à-dire : $x=t$.

On en déduit donc qu'une base de E_3 est $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

- On pose P la matrice de passage définie par :

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

On en déduit la forme diagonale D dans cette base :

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

3) Remarquons d'abord que la matrice B' définie par :

$$B'=\begin{pmatrix}i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix},$$

est telle que $(B')^2=D$.

En écrivant $A=PDP^{-1}=P(B')^2P^{-1}=(PB'P^{-1})(PB'P^{-1})$, et en posant $B=PB'P^{-1}$, on obtient : $A=B^2$, où B est la matrice définie par :

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\\ \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\\ \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\\ \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1) La matrice associée à $q(.)$ dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 1 & \sin\beta & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

2) La méthode de réduction en carrés de Gauss donne successivement :

$$\begin{aligned}
q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_4^2 + 2x_1x_3\cos\beta + 2x_2x_3\sin\beta - 4x_3x_4 \\
&= (x_1 + x_3\cos\beta)^2 - x_3^2\cos^2\beta + 2x_2x_3\sin\beta - 4x_3x_4 + x_2^2 + \alpha x_4^2 \\
&= (x_1 + x_3\cos\beta)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3\sin\beta - x_3^2\cos^2\beta - 4x_3x_4 + \alpha x_4^2 \\
&= (x_1 + x_3\cos\beta)^2 + (x_2 + x_3\sin\beta)^2 - x_3^2\sin^2\beta - x_3^2\cos^2\beta - 4x_3x_4 + \alpha x_4^2 \\
&= (x_1 + x_3\cos\beta)^2 + (x_2 + x_3\sin\beta)^2 - x_3^2 - 4x_3x_4 + \alpha x_4^2 \\
&= (x_1 + x_3\cos\beta)^2 + (x_2 + x_3\sin\beta)^2 - \left(x_3^2 + 4x_3x_4\right) + \alpha x_4^2 \\
&= (x_1 + x_3\cos\beta)^2 + (x_2 + x_3\sin\beta)^2 - (x_3 + 2x_4)^2 + 4x_4^2 + \alpha x_4^2 \\
&= (x_1 + x_3\cos\beta)^2 + (x_2 + x_3\sin\beta)^2 - (x_3 + 2x_4)^2 + (\alpha + 4)x_4^2.
\end{aligned}$$

Recherche de la base orthogonale de $q(.)$ (On se limite volontairement au cas $\alpha + 4 > 0$).

On pose :

$$\begin{cases} X = x_1 + x_3\cos\beta \\ Y = x_2 + x_3\sin\beta \\ Z = x_3 + 2x_4 \\ T = \sqrt{\alpha+4}\,x_4. \end{cases}$$

Inversons ce système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 = X - Z\cos\beta + \dfrac{2T\cos\beta}{\sqrt{\alpha+4}} \\ x_2 = Y - Z\sin\beta + \dfrac{2T\sin\beta}{\sqrt{\alpha+4}} \\ x_3 = Z - \dfrac{2T}{\sqrt{\alpha+4}} \\ x_4 = \dfrac{T}{\sqrt{\alpha+4}}. \end{cases}$$

Posons maintenant P la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cos\beta & \dfrac{2\cos\beta}{\sqrt{\alpha+4}} \\ 0 & 1 & -\sin\beta & \dfrac{2\sin\beta}{\sqrt{\alpha+4}} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2}{\sqrt{\alpha+4}} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\alpha+4}} \end{pmatrix}.$$

On définit la base orthogonale pour q par :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} -\cos\beta \\ -\sin\beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_4 = \begin{pmatrix} \dfrac{2\cos\beta}{\sqrt{\alpha+4}} \\ \dfrac{2\sin\beta}{\sqrt{\alpha+4}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{\alpha+4}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\alpha+4}} \end{pmatrix}.$$

3) Déterminons le rang et la signature de $q(.)$:

$$\begin{cases} \text{Si } \alpha+4>0, & \text{alors} \quad rg(q)=4 \quad \text{et} \quad sign(q)=(3,1), \\ \text{Si } \alpha+4=0, & \text{alors} \quad rg(q)=3 \quad \text{et} \quad sign(q)=(2,1), \\ \text{Si } \alpha+4<0, & \text{alors} \quad rg(q)=4 \quad \text{et} \quad sign(q)=(2,2). \end{cases}$$

Exercice 3

Posons P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que $\det P = 0$: la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc liée. Par contre, on montre que la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre.

La famille $\{v_1, v_2\}$ forme donc une base de V.

Orthonormalisons cette base par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt:

On a $\|v_1\| = \sqrt{58}$. On pose donc $v_1' = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{58}} \\ 0 \\ \frac{7}{\sqrt{58}} \end{pmatrix}$.

Posons maintenant $\tilde{v}_2 = v_2 + \lambda v_1'$ où λ est tel que: $\langle \tilde{v}_2, v_1' \rangle = 0$, c'est-à-dire:

$$\langle v_2, v_1' \rangle + \lambda \langle v_1', v_1' \rangle = 0,$$

soit $\lambda = -\langle v_2, v_1' \rangle = -\frac{18}{\sqrt{58}}$.

On a donc: $\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{56}{29} \\ 4 \\ \frac{24}{29} \end{pmatrix}$. De plus $\|\tilde{v}_2\| = \sqrt{\frac{592}{29}}$.

On pose alors: $v_2' = \begin{pmatrix} \frac{14}{\sqrt{1073}} \\ \frac{\sqrt{1073}}{37} \\ \frac{6}{\sqrt{1073}} \end{pmatrix}$.

La base $\{v_1', v_2'\}$ ainsi définie est une base orthonormale de V.

Exercice 4

1) • Déterminons les équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$.

$$\begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 2 + z \quad , z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

Le point A de coordonnées $A(1,2,0)$ appartient à $\mathcal{D}_1$, le vecteur $\vec{u}_1 = (2,1,1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$.

• Déterminons les équations paramétriques de $\mathcal{D}_2$.

Le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x - 2y + 2z = a & (2) \end{cases}$$

s'écrit, en calculant $(2)-(1)$:

$$\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ -3y+z=a-1 & (2). \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} x=2-a-4y \\ y=y & , y\in\mathbb{R}. \\ z=a-1+3y \end{cases}$$

Le point B de coordonnées $B(2-a,0,a-1)$ appartient à $\mathcal{D}_2$ et le vecteur $\vec{u}_2=(-4,1,3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.

- Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)=0$, c'est-à-dire, si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right) &= \begin{vmatrix} 1-a & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-a & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1+2C_2 \\
&= \begin{vmatrix} 5-a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2-C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 5-a & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2-C_3 \\
&= -\begin{vmatrix} 5-a & 6 \\ a+1 & -2 \end{vmatrix} = 4a+16=0.
\end{aligned}$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes si et seulement si $a=-4$.

Donnons maintenant l'équation du plan $\mathcal{P}$ contenant les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$:
Un point $M(X,Y,Z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)=0$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}_1,\vec{u}_2\right) &= \begin{vmatrix} X-1 & 2 & -4 \\ Y-2 & 1 & 1 \\ Z & 1 & 3 \end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\
&= \begin{vmatrix} X-2Y+3 & 0 & -6 \\ Y-2 & 1 & 1 \\ Z & 1 & 3 \end{vmatrix}, L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
&= \begin{vmatrix} X-2Y+3 & 0 & -6 \\ Y-Z-2 & 0 & -2 \\ Z & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} X-2Y+3 & -6 \\ Y-Z-2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -(-2X+4Y-6+6Y-6Z-12) \\
&= 2X-10Y+6Z+18=0.
\end{aligned}$$

L'équation du plan $\mathcal{P}$ est donc $X-5Y+3Z+9=0$.

Exercice 5

1) Un endomorphisme f est dit antisymétrique si et seulement si

$$\forall x,y \in E, \langle f(x),y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$

Soit λ une valeur propre de f, et soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, avec $\langle x,x\rangle = 1$, par exemple.

On a alors d'une part :

$$\langle f(x),x\rangle = \langle \lambda x,x\rangle = \lambda\langle x,x\rangle = \lambda,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\langle f(x),x\rangle &= -\langle x,f(x)\rangle, \text{ car } A \text{ est antisymétrique,} \\
&= -\langle x,\lambda x\rangle \\
&= -\lambda\langle x,x\rangle = -\lambda.
\end{aligned}$$

En comparant ces deux expressions de $\langle f(x),x\rangle$, on en déduit que $\lambda=0$.

2) Montrons que $I+A$ est inversible :

Supposons que $I+A$ ne soit pas inversible. Il existe alors un vecteur non nul $x\in E$, tel que $(I+A)(x)=0$, donc $Ax=-x$.

Ceci signifie que -1 est valeur propre de l'endomorphisme antisymétrique A. On aboutit donc à une contradiction, puisque 0 est la seule valeur propre d'un endomorphisme antisymétrique. Ainsi, $I+A$ est inversible.

Avec un raisonnement similaire, on montre que $I-A$ est inversible.

3) Montrons que la matrice $Q=(I+A)^{-1}(I-A)$ est orthogonale.

Prenons $x\in E$. On cherche à montrer que $\langle Q(x),Q(x)\rangle=\langle x,x\rangle$.

On remarque d'abord que Q s'écrit $Q=(I+A)^{-1}\big(2I-(I+A)\big)=2(I+A)^{-1}-I$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle Q(x),Q(x)\rangle &= \langle 2(I+A)^{-1}(x)-x, 2(I+A)^{-1}(x)-x\rangle\\ &= 4\langle (I+A)^{-1}(x),(I+A)^{-1}(x)\rangle-4\langle (I+A)^{-1}(x),x\rangle+\langle x,x\rangle.\end{aligned}$$

Simplifions les termes : $\langle (I+A)^{-1}(x),(I+A)^{-1}(x)\rangle$ et $\langle (I+A)^{-1}(x),x\rangle$.

Pour cela, on pose $y=(I+A)^{-1}(x)$, c'est-à-dire : $x=y+Ay$.

On a donc

$$\langle (I+A)^{-1}(x),(I+A)^{-1}(x)\rangle=\langle y,y\rangle$$

et :

$$\begin{aligned}\langle (I+A)^{-1}(x),x\rangle &= \langle y,x\rangle=\langle y,y+Ay\rangle\\ &= \langle y,y\rangle+\langle y,Ay\rangle.\end{aligned}$$

De plus, on a $\langle y,Ay\rangle=0$. En effet :

$$\begin{aligned}\langle y,Ay\rangle &= -\langle Ay,y\rangle, \text{ car } A \text{ est antisymétrique},\\ &= -\langle y,Ay\rangle, \text{ par symétrie du produit scalaire } \langle .,.\rangle,\end{aligned}$$

ainsi, $\langle y,Ay\rangle=0$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\langle Q(x),Q(x)\rangle &= 4\langle (I+A)^{-1}(x),(I+A)^{-1}(x)\rangle-4\langle (I+A)^{-1}(x),x\rangle+\langle x,x\rangle\\ &= 4\langle y,y\rangle-4\langle y,y\rangle-4\langle y,Ay\rangle+\langle x,x\rangle\\ &= \langle x,x\rangle \text{ (car } \langle y,Ay\rangle=0).\end{aligned}$$

L'endomorphisme Q est donc un endomorphisme orthogonal.

4. Sujet n° 4

a) Énoncé

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3, et soit l'application $u : E \to E$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ u(P) = \left(X^2 - 1\right)P'' + (2X+1)P'.$$

1) Vérifier que u est un endomorphisme de E.
2) Soit $B = \left\{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2, e_4 = X^3\right\}$ la base canonique de E. Décomposer dans la base B les polynômes $u(e_i)$, pour $i = 1,\dots,4$.
3) En déduire la matrice A de u relativement à la base B.
4) Montrer que A est diagonalisable. Quel est son polynôme minimal?
5) Calculer A^n, où $n \in \mathbb{N}^*$.
6) *Application*

On considère la suite réelle de terme général $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$ définie par $U_{n+1} = AU_n, \forall n \in \mathbb{N}$

et U_0 donnée. Déterminer U_n en fonction de n et de $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 et soit la forme bilinéaire symétrique $\langle .,. \rangle : E \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\langle P,Q \rangle = \sum_{i=1}^{3} P(i)Q(i) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

1) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.
2) Préciser et justifier, sans faire de calculs, le rang et la signature de la forme quadratique associée.
3) Soit $F = \left\{P \in E, P(0) = 0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.

4) Déterminer, par le procédé de Gram-Schmidt, une base orthonormale de F relativement au produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

5) Déterminer la dimension et une base de $F^{\perp}$.

(On rappelle que $F^{\perp}$ est le sous-espace orthogonal de F relativement au produit scalaire $\langle .,. \rangle$).

Exercice 3

1) Déterminer tous les couples $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ b & a & 2 \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$$

soit orthogonale.

2) Dans le cas où A est une rotation, préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 4

Dans l'espace affine tridimensionnel usuel $\mathcal{E}$ muni du repère affine $\mathcal{R} = \left\{O\,;e_1,e_2,e_3,e_4\right\}$, on considère les droites

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{\alpha}.$$

1) Déterminer le paramètre réel α tel que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient concourantes. Déterminer ensuite les coordonnées du point d'intersection entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2) Écrire l'équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par ces deux droites.

3) Donner ensuite les équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par la point $M(5,-4,1)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

b) Corrigé

Exercice 1

1) Soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

En utilisant la linéarité de la dérivation, on montre que:

$$u(P+Q) = u(P) + u(Q),$$

$$u(\lambda P) = \lambda u(P).$$

De plus, $(X^2-1)P''+(2X+1)P'$ étant un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, on en déduit que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) On a :

$$\begin{cases} u(e_1)=0 \\ u(e_2)=2X+1 \\ u(e_3)=6X^2+2X-2 \\ u(e_4)=12X^3+3X^2-6X. \end{cases}$$

3) La matrice A de u est donnée par :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

4) Cette matrice est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc $\{0,2,6,12\}$.

Chacunes de ses valeurs propres étant de multiplicité 1, on en déduit que la matrice A est diagonalisable.

Le polynôme minimal de A ayant pour racines les valeurs propres de A, et chacune des valeurs propres de A étant de multiplicité 1, on en déduit que :

$$m_A(X)=X(X-2)(X-6)(X-12)=P_A(X).$$

La diagonalisation de A donne :

$e'_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0,

$e'_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2,

$e'_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 6,

$e'_4=\begin{pmatrix}1\\4\\-4\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 12.

On en déduit que, dans cette base, A s'écrit :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \Delta,$$

où on a noté P la matrice donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

5) Le calcul de Δ^n donne $\Delta^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$ et celui de $A^n = P\Delta^n P^{-1}$ donne :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2^n}{2} & -\frac{2^n}{4} - \frac{6^n}{4} & \frac{3\times 2^n}{8} + \frac{6^n}{8} - \frac{12^n}{8} \\ 0 & 2^n & -\frac{2^n}{2} + \frac{6^n}{2} & \frac{3\times 2^n}{4} - \frac{6^n}{4} - \frac{12^n}{2} \\ 0 & 0 & 6^n & -\frac{6^n}{2} + \frac{12^n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}.$$

6) La relation $U_{n+1} = AU_n$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} \frac{2^n}{4} + \frac{6^n}{4} \\ \frac{2^n}{2} - \frac{6^n}{2} \\ 6^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1) On montre facilement la linéarité, la symétrie et la positivité de $\langle .,. \rangle$.

Montrons que $\langle .,. \rangle$ est définie :

Prenons $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et supposons que $(P(0))^2 + (P(1))^2 + (P(2))^2 = 0$.

Alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Le polynôme P a trois racines distinctes, mais il est de degré inférieur où égal à 2 : c'est donc le polynôme nul.

Donc $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire définie.

2) La forme quadratique associée (notée q) provient d'un produit scalaire, donc $rg(q) = 3$ et $sign(q) = (3,0)$.

3) Soient P et Q appartenant à F, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On montre que $P + Q \in F$ et $\lambda P \in F$, donc que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour la base de F, prenons par exemple : $\left\{X, X^2\right\}$.

4) Posons $P(X) = X$.

$$\langle X, X \rangle = 1 + 4 = 5.$$

Posons

$$P_1(X) = \frac{X}{\sqrt{5}}.$$

Posons maintenant $P(X) = X^2 + \lambda X$.

On a :

$$\langle P(X), X \rangle = \langle X^2, X \rangle + \lambda \langle X, X \rangle,$$

c'est-à-dire :

$$\lambda = \frac{-9}{5}.$$

On a ainsi $P(X) = X^2 - \frac{9}{5}X$.

Calculons maintenant :

$$\langle P(X), P(X) \rangle = \left(1 - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(4 - 2 \times \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{20}{25}.$$

Ainsi, on pose

$$P_2(X) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(X^2 - \frac{9}{5}X\right).$$

Une base orthonormale de F est :

$$\left\{P_1(X) = \frac{X}{\sqrt{5}}\,;\, P_2(X) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(X^2 - \frac{9}{5}X\right)\right\}.$$

5) On sait que $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$, donc $\dim F^{\perp} = 3 - 2 = 1$.

Cherchons donc à caractériser un élément P dans $F^{\perp}$.

Soit $P \in F^{\perp}$. On a donc $\langle P, X \rangle = 0$ et $\langle P, X^2 \rangle = 0$, ce qui donne le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} P(1) + 2P(2) = 0 \\ 2P(1) + 4P(2) = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne facilement : $P(1) = P(2) = 0$.

Le polynôme P est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, et qui admet 1 et 2 comme racines. On a donc $F^{\perp} = vect\{(X-1)(X-2)\}$.

Exercice 3

1) On calcule $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}+\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9} & \frac{4}{9}+\frac{2ab}{9} & \frac{4a}{9}+\frac{2b}{9} \\ \frac{4}{9}+\frac{2ab}{9} & \frac{4}{9}+\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9} & \frac{4a}{9}+\frac{2b}{9} \\ \frac{4a}{9}+\frac{2b}{9} & \frac{4a}{9}+\frac{2b}{9} & \frac{a^2}{9}+\frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

On veut que $A^T A = I$, cela aboutit donc au système :

$$\begin{cases} \frac{4}{9}+\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9} = 1 \\ \frac{a^2}{9}+\frac{8}{9} = 1 \\ \frac{4}{9}+\frac{2ab}{9} = 0 \\ \frac{4a}{9}+\frac{2b}{9} = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne deux couples de solutions possibles :

$$\{(a,b) = (1,-2)\,;\,(a,b) = (-1,2)\}.$$

2) Le couple $(a,b) = (1,-2)$ conduit à une matrice A de déterminant $+1$ donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

On étudie de cette matrice.

- Recherche des vecteurs invariants par A.

  1 est la seule valeur propre réelle. Un vecteur propre unitaire associé est:

$$e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

- Complétons e_1' pour former une base orthonormée directe de E.

  On peut choisir $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3' = e_1' \wedge e_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

  L'endomorphisme représenté par A est donc une rotation d'axe orienté par e_1' et d'angle θ que l'on va préciser plus loin. Dans la base orthonormée directe $\{e_1', e_2', e_3'\}$, A s'écrit:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Calcul de l'angle θ

  Le calcul de la trace donne: $Tr(A) = 1 + 2\cos\theta = \frac{5}{3}$, soit $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

- Signe de $\sin\theta$

  Soit $x = (1,0,0)$. Alors $Ax = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Le signe de $\sin\theta$ est donné par:

$$\det(x, Ax, e_1') = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} < 0,$$

  donc $\sin\theta < 0$ pour ce choix d'orientation de e_1'.

REMARQUE

Si on pose : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, alors :

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A'.$$

Exercice 4

1) Cherchons tout d'abord les équations paramétriques de D_1.

Le système linéaire :

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 & (1) \\ 2x - y - z - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

devient :

$$\begin{cases} x = x \\ y = 4 - 3x \quad , x \in \mathbb{R}. \\ z = -7 + 5x \end{cases}$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, de plus, le point $A(0,4,-7)$ est un point de $\mathcal{D}_1$.

- De même, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, de plus, le point $B(0,1,-1)$ est un point de $\mathcal{D}_2$.
- Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right) = 0$.

  On calcule donc $\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right)$:

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 6 & 5 & \alpha \end{vmatrix}, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & \alpha + 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & \alpha + 4 \end{vmatrix} = 3(\alpha + 7). \end{aligned}$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes pour $\alpha = -7$.

Déterminons maintenant les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$:

Notons λ le réel défini par :

$$\lambda = \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{\alpha}.$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = -1 - 7\lambda \end{cases}$$

Remplaçons ces résultats dans les équations qui forment $\mathcal{D}_1$:

On trouve: $2x - y - z - 3 = 2(3\lambda) - (1+2\lambda) - (-1-7\lambda) - 3 = 0$, soit $\lambda = \frac{11}{3}$.

Le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ a pour coordonnées: $K\left(11, \frac{25}{3}, -\frac{80}{3}\right)$.

2) Soit $M(X,Y,Z)$ un point du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Alors la famille $\left\{\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right\}$ est liée. On a donc $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right) = 0$,

c'est-à-dire:

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right) = \begin{vmatrix} X & 1 & 3 \\ Y-4 & -3 & 2 \\ Z+7 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

On a donc:

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right) &= \begin{vmatrix} X & 1 & 3 \\ Y-4 & -3 & 2 \\ Z+7 & 5 & -7 \end{vmatrix} \\ &= X(21-10) - (Y-4)(-7-15) + (Z+7)(2+9) \\ &= 11X + 22(Y-4) + 11(Z+7) \\ &= 11X + 22Y + 11Z - 11. \end{aligned}$$

L'équation du plan $\mathcal{P}$ est donc $X + 2Y + Z - 1 = 0$.

3) La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, donc tout vecteur normal de $\mathcal{P}$ est vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Choisissons par exemple: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, comme vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Le point $N(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{MN}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{MN} = \lambda\vec{n}$.

On obtient donc le système linéaire:

$$\begin{cases} x-5=\lambda \\ y+4=2\lambda. \\ z-1=\lambda \end{cases}$$

Les équations paramétriques de $\mathcal{D}$ sont donc:

$$\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-4+2\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}. \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

5. Sujet n° 5

a) Énoncé

Questions de cours :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Soit u un endomorphisme de E.

1) Qu'est ce qu'une valeur propre de u?

2) Rappeler la définition du sous-espace propre et du sous-espace caractéristique associés à une valeur propre de u; Quelles conditions, nécessaires et suffisantes, doivent vérifier ces sous-espaces pour que u soit diagonalisable.

3) Quand dit-on que deux matrices sont semblables ?

4) Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 1 :

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1) Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le polynôme minimal de A et de B.

Montrer que $(A - I_4)^2 = 0$ et que $(B - I_4)^2 \neq 0$.

En déduire, en faisant un raisonnement par l'absurde, que A et B ne sont pas semblables.

2) Soient maintenant A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme minimal $m(X)$. On suppose que $m(X)$ est scindé.

Montrer que A et B sont semblables. (On discutera suivant l'ordre de multiplicité des valeurs propres).

Exercice 2

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & -2 & -3 \\ 0 & -8 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3) Déterminer une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.
4) Calculer le polynôme minimal de A et en déduire l'expression de A^{-1} et de A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).
5) Résoudre le système différentiel $\dfrac{dX}{dt}(t) = AX(t)$.

Exercice 3

Soit b la forme bilinéaire sur $(\mathbb{R}_2[X])^2$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], b(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1).$$

1) Montrer que b est une forme bilinéaire et donner sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) On considère le système $\mathcal{B}' = \{1 - X^2, X, X^2\}$.

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de b dans cette base.

b) En déduire l'expression, dans cette base, de b et de la forme quadratique q associée.

c) Déterminer l'ensemble J_q des vecteurs isotropes pour q.

3) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = 0\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer une base de F.

b) Déterminer l'orthogonal de F relativement à b.

b) Corrigé

Questions de cours :

1) λ est appelé valeur propre de u si et seulement s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que :

$$u(x) = \lambda x.$$

2) On désigne par $\ker(u - \lambda I)$, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

On note $\ker(u - \lambda I)^{\alpha_\lambda}$, le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ où α_λ désigne l'ordre de nilpotence de λ, c'est-à-dire la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de u.

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u.

On note $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

On note aussi $N_{\lambda_1}, N_{\lambda_2}, \ldots, N_{\lambda_p}$ les espaces caractéristiques associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$$

équivalent à : $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \ldots + \dim E_{\lambda_p}$

équivalent à : $\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \dim E_{\lambda i} = \dim N$

équivalent à : $\forall i \in \{1, \ldots, N\}, E_{\lambda_i} = N_{\lambda_i}$.

3) Deux matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

4) Notons P_A (respectivement P_B) le polynôme caractéristique de A (respectivement B).

On a alors:

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI) = \det\left(P^{-1}BP - XI\right) \\ &= \det\left(P^{-1}BP - XP^{-1}IP\right) = \det\left(P^{-1}(B - XI)P\right) \\ &= \det\left(P^{-1}\right) \times \det(P) \times \det(B - XI) \\ &= \det(B - XI) = P_B(X). \end{aligned}$$

Exercice 1

1) Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-\lambda & \lambda-1 \\ -17 & -6 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$C_4 \leftarrow C_4 - C_3$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ -17 & -6 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ -10 & -5 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ -10 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4.$$

On remarque que $(A - I)^2 = 0$.

Le polynôme minimal m_A de A est donc $m_A(X) = (X-1)^4$.

De plus, le polynôme caractéristique de B est $P_B(\lambda) = (1-\lambda)^4$.

On calcule donc: $(B - I)^2 \neq 0\,;\,(B - I)^3 \neq 0$ et $(B - I)^4 \neq 0$.

Le polynôme minimal de B est donc $m_B(X) = (X-1)^4$.

Montrons maintenant que A et B ne sont pas semblables.

Supposons par l'absurde que A et B sont semblables, alors il existe une matrice P inversible telle que : $A = P^{-1}BP$.

Calculons donc $(A-I)^2$:

$$\begin{aligned}(A-I)^2 &= \left(P^{-1}BP - I\right)^2\\ &= \left(P^{-1}BP - P^{-1}IP\right)^2\\ &= P^{-1}(B-I)^2 P.\end{aligned}$$

On sait que $(A-I)^2 = 0$, donc $P^{-1}(B-I)^2 P = 0$ soit, puisque P est inversible, $(B-I)^2 = 0$, ce qui contredit un résultat précédent.

Finalement, on en déduit que A et B ne sont pas semblables.

3) On sait que $m(X)$ est un polynôme scindé de $\mathbb{R}_2[X]$.

Donc :

$$\begin{cases} m(X) = (X-\alpha)(X-\beta) & (1)\\ m(X) = (X-\alpha) & (2)\\ m(X) = (X-\alpha)^2 & (3)\end{cases}$$

- 1er cas : $m(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$.

  Dans ce cas, m est scindé et ses racines sont simples, donc les matrices A et B sont diagonalisables.

  Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$\begin{cases} P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\\ \text{et}\\ Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\end{cases}.$$

  On a donc :

$$P^{-1}AP = Q^{-1}BQ,$$

  c'est-à-dire :

$$\left(QP^{-1}\right)A\left(QP^{-1}\right)^{-1} = B.$$

  Ainsi, les matrices A et B sont semblables.

- 2e cas : $m(X) = (X-\alpha)$.

  Dans ce cas :

$$A = B = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} = \alpha I.$$

Les matrices A et B sont donc semblables.

- 3e cas : $m(X) = (X - \alpha)^2$.

Dans ce cas, le polynôme m est scindé mais ses racines ne sont pas simples, donc les matrices A et B ne sont pas diagonalisables.

En revanche, on peut utiliser la réduction de Jordan de ces deux matrices.

Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$\begin{cases} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On a donc :

$$P^{-1}AP = Q^{-1}BQ,$$

c'est-à-dire :

$$\left(QP^{-1}\right)A\left(QP^{-1}\right)^{-1} = B.$$

Ainsi, les matrices A et B sont semblables.

Exercice 2 :

1) Calculons $\det(A - \lambda I)$:

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -8 & 0 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -8 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & -8 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -8 & 0 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -8 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & -8 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ -8 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2+\lambda)^2(4-\lambda)^2.$$

2) On a : $A-4I=\begin{pmatrix}0 & -8 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 6 & -8 & -6 & -3\\ 0 & -8 & 0 & -6\end{pmatrix}.$

La matrice extraite : $\begin{pmatrix}-8 & 0 & -3\\ -8 & -6 & -3\\ -8 & 0 & -6\end{pmatrix}$ est inversible, donc $rg(A-4I)=3$, donc $\dim\ker(A-4I)=1\neq 2$.

Dès lors, on voit que A n'est pas diagonalisable.

3) Réduite de Jordan de la matrice A :

Le polynôme caratéristique de A est donné par :

$$P(X)=(2+X)^2(4-X)^2.$$

Posons $M=A-4I=\begin{pmatrix}0 & -8 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 6 & -8 & -6 & -3\\ 0 & -8 & 0 & -6\end{pmatrix}.$

On a vu que $rg(M)=3$, donc $\dim\ker(M)=1$.

Calculons :

$$M^2=\begin{pmatrix}0 & 24 & 0 & 18\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -36 & 24 & 36 & 18\\ 0 & 48 & 0 & 36\end{pmatrix}.$$

On a clairement $rg(M^2)=2$ donc $\dim\ker(M^2)=2$.

Par ailleurs, si on pose $N=A+2I=\begin{pmatrix}6 & -8 & 0 & -3\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 6 & -8 & 0 & -3\\ 0 & -8 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

On peut montrer que $rg(N)=2$ donc $\dim\ker(N)=2$.

La réduite de Jordan de A comporte donc un bloc associé à la valeur propre 4 de taille 2 et deux blocs associés à la valeur propre -2 de taille 1 chacun.

Construisons une base associée à cette réduction :

Prenons

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in \ker\left(M^2\right) \setminus \ker(M),$$

puis

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant une base de $\ker(A+2I)$:

On a :

$$\begin{cases} 6x - 8y - 3t = 0 \\ 6y = 0 \\ 6x - 8y - 3t = 0' \\ -8y = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z \\ t = 2x \end{cases}, (x,z) \in \mathbb{R}^2.$$

Une base de $\ker(A+2I)$ est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Posons P la matrice de passage définie :

$$P = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{12} & \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = J.$$

4) Compte tenu de sa réduction de Jordan, le polynôme minimal de A est :

$$m_A(X) = (X+2)(X-4)^2.$$

- Calcul de A^{-1}

On a :

$$m_A(A) = 0,$$

donc

$$A^3 - 6A^2 + 32I = 0.$$

On peut donc écrire que :

$$A\left(A^2 - 6A\right) = -32I,$$

c'est-à-dire :

$$A\left(\frac{-1}{32}\left(A^2 - 6A\right)\right) = I.$$

La matrice A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{-1}{32}\left(A^2 - 6A\right),$$

c'est-à-dire :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-3}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{8} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}$

La division euclidienne de X^n par $m_A(X)$ donne :

$$X^n = m_A(X)Q(X) + R(X) \quad (1),$$

avec $R = 0$ ou $\deg R < 3$.

Dans les deux cas, on a : $R(X) = aX^2 + bX + c$.

De plus, pour $X = -2$, on a :

$$(-2)^n = 4a + 2b + c.$$

Pour $X = 4$, on a :

$$4^n = 16a + 4b + c.$$

En dérivant (1), puis en prenant $X = 4$, on obtient :

$$n4^{n-1} = 8a + b.$$

Les coefficients a, b, c vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = (-2)^n \\ 16a + 4b + c = 4^n \\ 8a + b = n4^{n-1}. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne :

$$\begin{cases} a = (-2)^{n-2} - 4^{n-1}\left(1 - \frac{n}{2}\right) \\ b = (-2)^{n+1} + 4^{n-1}(8 - 3n) \\ c = (-2)^{n+2} + 4^n(n-3), \end{cases}$$

ce qui donne l'expression de A^n en fonction de n :

$$\begin{aligned} A^n &= \left[(-2)^{n-2} - 4^{n-1}\left(1 - \frac{n}{2}\right)\right]A^2 + \left[(-2)^{n+1} + 4^{n-1}(8 - 3n)\right]A \\ &\quad + \left[(-2)^{n+2} + 4^n(n-3)\right]I. \end{aligned}$$

3) Résolution du système différentiel $\dfrac{dX}{dt}(t) = AX(t)$.

Vu que :

$$A = PJP^{-1},$$

on a alors :

$$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

De plus,

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{tJ}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{4t} & -4te^{4t} - \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{2}{3}e^{-2t} & 0 & -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{4t} & 0 & 0 \\ e^{4t} - e^{-2t} & -4te^{4t} - \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{2}{3}e^{-2t} & e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 & -\frac{4}{3}e^{4t} + \frac{4}{3}e^{-2t} & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution du système différentiel est donnée par :

$$X(t) = e^{tA}U_0,$$

où U_0 est la condition initiale.

Exercice 3

1) Soient P, Q et R dans $\mathbb{R}_2[X]$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On montre facilement que :

$$\begin{cases} b(P+Q,R) = b(P,R) + b(Q,R), \\ b(\lambda P,Q) = \lambda b(P,Q), \\ \\ b(P,R+Q) = b(P,R) + b(P,Q), \\ b(P,\lambda Q) = \lambda b(P,Q). \end{cases}$$

La matrice de b par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) a) Montrons que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$:

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

La matrice de b dans cette base est donnée par :

$$A' = P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Notons P (respectivement Q) le polynôme défini par :

$$P(X) = a_0\left(1 - X^2\right) + a_1 X + a_2 X^2$$

(respectivement par $Q(X) = b_0(1 - X^2) + b_1 X + b_2 X^2)$.

On a alors :

$$\begin{cases} b(P,Q) = -2a_1 b_1 + 2a_2 b_2, \\ q(P) = -2a_1^2 + 2a_2^2. \end{cases}$$

c) L'ensemble des vecteurs isotropes est l'ensemble $J_q = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X], q(P) = 0\right\}$

On a donc : $-2a_1^2 + 2a_2^2 = 0$, c'est-à-dire : $a_1^2 = a_2^2$, soit $a_1 = a_2$ ou $a_1 = -a_2$.

Si $a_1 = a_2$: dans ce cas, $P(X) = a_0\left(1 - X^2\right) + a_1\left(X + X^2\right)$, donc :

$$P \in vect\left\{1 - X^2, X + X^2\right\}.$$

Si $a_1 = -a_2$: dans ce cas, $P(X) = a_0\left(1 - X^2\right) + a_1\left(X - X^2\right)$, donc :

$$P \in vect\left\{1 - X^2, X - X^2\right\}.$$

L'ensemble des vecteurs isotropes est donc l'ensemble :

$$Jq = vect\left\{1 - X^2, X + X^2\right\} \cup vect\left\{1 - X^2, X - X^2\right\}.$$

3) a) On montre facilement que f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et qu'une base de F est par exemple,

$$\mathcal{B}_F = \{X, X^2\}.$$

b) Soit P appartenant à $F^\perp$.

Alors $b(P,X)=0$ et $b(P,X^2)=0$. Avec l'expression de b donnée dans l'énoncé, ces deux expressions s'écrivent :

$$\begin{cases} -P(1)+P(-1)=0 \\ P(1)+P(-1)=0, \end{cases}$$

ce qui donne $P(-1)=P(1)=0$.

Le polynôme P admet donc au moins deux racines -1 et 1.

Vu que $P \in \mathbb{R}_2[X]$, P s'écrit $P(X)=\alpha\left(X^2-1\right)$.

On a donc :

$$F^\perp = vect\left\{X^2-1\right\}.$$

6. Sujet n° 6

a) Énoncé

Questions de cours

On se place sur un espace euclidien E.

1) Rappeler la définition d'un endomorphisme orthogonal sur E.

2) Montrer qu'un endomorphisme u de E est orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

En déduire que tout endomorphisme orthogonal sur E est bijectif.

3) Comment définit-on la projection orthogonale p_F sur un sous-espace F de E?

Montrer que si $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ est une base orthonormale de F, alors on a :

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Exercice 1

1) Déterminer en fonction des paramètres réels λ et μ le rang et la signature de la forme quadratique q suivante, ainsi qu'une base de $\mathbb{R}^4$ q-orthogonale.

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\mu x_1 x_2 + 2x_1 x_4 + 2\mu x_2 x_4.$$

Donner la matrice associée à q par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2) Pour quelle valeurs de λ et μ la forme quadratique q est-elle un produit scalaire?

3) On suppose que $\lambda = 2$ et que $\mu = 0$. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par:

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4),\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

Déterminer une base de F orthonormale pour q.

4) Soit $v = (1,2,-2,2)$ un élément de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la projection orthogonale de v sur F et calculer $d(v,F)$.

Exercice 2

Diagonaliser la matrice A suivante en construisant une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de A. Donner de plus la matrice de passage et son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Etudier les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est donnée respectivement par:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;b)\ B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Le point I est le milieu de $[A,D]$, J est le milieu de $[B,C]$, K est au tiers de $[B,A]$ en partant de B et L est au tiers de $[C,D]$ en partant de C. Montrer que les droites (KI), (JL) et (BD) sont concourantes. En déduire que les points I, J, K, L sont coplanaires.

Exercice 5

On considère les droites :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{\alpha}.$$

1) Déterminer le paramètre réel α tel que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient concourantes. Déterminer ensuite les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2) Ecrire l'équation du plan déterminé par ces deux droites.

3) Donner les équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $M(0,-4,1)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

b) Corrigés

Question de cours

1) Un endomorphisme est dit orthogonal si et seulement s'il vérifie la propriété suivante:

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

2) • Montrons que : u orthogonal $\Rightarrow \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

Soit u un endomorphisme orthogonal et x dans E.

En utilisant la définition précédente avec $x = y$, on obtient:

$$\langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle,$$

c'est-à-dire:

$$\|u(x)\|^2 = \|x\|^2,$$

soit, par positivité de la norme:

• Montrons que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\| \Rightarrow u$ orthogonal

Supposons que pour tout z dans E, on a :

$$\|u(z)\| = \|z\|.$$

Alors

$$\|u(z)\|^2 = \|z\|^2.$$

Soient x, y dans E.

Posons $z = x + y$. On a alors:

$$\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2.$$

En développant cette dernière égalité et en remarquant que $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ et $\|u(y)\|^2 = \|y\|^2$, on obtient que:

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

donc u est bien un endomorphisme orthogonal.

Montrons maintenant que tout endomorphisme orthogonal est bijectif:

Soit u un endomorphisme orthogonal et soit x dans E tel que $u(x) = 0$.

On a donc: $\|u(x)\| = 0$, et en utilisant ce qui précède, on a: $\|x\| = 0$. Ainsi, d'après une propriété de la norme: $x = 0$. Ainsi, u est injectif, donc bijectif car E est de dimension finie.

3) On décompose E de la façon suivante: $E = F \oplus F^{\perp}$. Ainsi, tout élément x de E s'écrit de manière unique: $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$.

La projection orthogonale sur F est alors définie par: $P_F(x) = x_1$.

Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base orthonormale de F. On complète cette base orthonormale de F en une base orthonormale de E, notée $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Soit x dans E. Alors x s'écrit: $x = \underbrace{\sum_{i=1}^{i=p} \langle x, e_i\rangle e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{i=n} \langle x, e_i\rangle e_i}_{\in F^{\perp}}$.

Par définition de P_F, on a donc:

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{i=p} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Exercice 1

1) On écrit $x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + 2x_1 x_4$ sous la forme $(x_1 + \mu x_2 + x_4)^2 - \mu^2 x_2^2 - x_4^2 - 2\mu x_2 x_4$. Ainsi:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + \mu x_2 + x_4)^2 - \mu^2 x_2^2 - x_4^2 - 2\mu x_2 x_4 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\mu x_2 x_4 \\ &= (x_1 + \mu x_2 + x_4)^2 + (3 - \mu^2) x_2^2 + 4x_3^2 + (\lambda - 1) x_4^2. \end{aligned}$$

Si $3 - \mu^2 > 0$:

si $\lambda - 1 > 0$, alors $sign(q) = (4, 0)$ et $rg(q) = 4$,

si $\lambda - 1 < 0$, alors $sign(q) = (3, 1)$ et $rg(q) = 4$,

si $\lambda - 1 = 0$, alors $sign(q) = (3, 0)$ et $rg(q) = 3$.

Si $3-\mu^3<0$:

$$\text{si } \lambda-1>0, \text{ alors } sign(q)=(3,1) \text{ et } rg(q)=4,$$
$$\text{si } \lambda-1<0, \text{ alors } sign(q)=(2,2) \text{ et } rg(q)=4,$$
$$\text{si } \lambda-1=0, \text{ alors } sign(q)=(2,1) \text{ et } rg(q)=3.$$

Si $3-\mu^2=0$:

$$\text{si } \lambda-1>0, \text{ alors } sign(q)=(3,0) \text{ et } rg(q)=3,$$
$$\text{si } \lambda-1<0, \text{ alors } sign(q)=(2,1) \text{ et } rg(q)=3,$$
$$\text{si } \lambda-1=0, \text{ alors } sign(q)=(2,0) \text{ et } rg(q)=2.$$

2) La forme quadratique q définit un produit scalaire lorsque q est définie positive, c'est-à-dire lorsque $sign(q)=(4,0)$. Les valeurs de (λ,μ) possibles sont $\lambda-1>0$ et $3-\mu^2>0$.

3) La forme quadratique q est définie par : $q(x)=(x_1+x_4)^2+3x_2^2+4x_3^2+x_4^2$.

L'espace vectoriel F est engendré par : $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$; $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Il reste maintenant à orthonormaliser cette base par le procédé de Schmidt relativement au produit scalaire défini par q, c'est-à-dire le produit scalaire défini par :

$$B(x,y)=(x_1+x_4)(y_1+y_4)+3x_2y_2+4x_3y_3+x_4y_4.$$

On a $q(e_1)=4+1=5$, on pose donc : $e_1'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

On pose $\tilde{e}_2=e_2+\alpha e_1$. On veut que $B(\tilde{e}_2,e_1')=0$, donc $B(e_2,e_1')+\alpha B(e_1,e_1')=0$.

On trouve $\alpha=\frac{-3}{5}$, soit $\tilde{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{-3}{5}\\1\\0\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}$.

De plus, $q(\tilde{e}_2) = \dfrac{16}{5}$. D'où $e_2' = \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{4\sqrt{5}} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{4} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

On pose $\tilde{e}_3 = e_3 + \alpha e_2 + \beta e_1$. On veut $B(\tilde{e}_3, e_1') = 0$ et $B(\tilde{e}_3, e_2') = 0$. On trouve:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{-1}{16} \\ \beta = \dfrac{-9}{16}, \end{cases}$$

soit $\tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{-9}{16} \\ \dfrac{-1}{16} \\ 1 \\ \dfrac{3}{8} \end{pmatrix}$.

De plus, $q(\tilde{e}_3) = \dfrac{67}{16}$. D'où $e_3' = \begin{pmatrix} \dfrac{-9\sqrt{67}}{268} \\ \dfrac{-\sqrt{67}}{268} \\ \dfrac{4\sqrt{67}}{67} \\ \dfrac{3\sqrt{67}}{134} \end{pmatrix}$.

4) D'après la question de cours, on a:

$$P_F(x) = B(x, e_1')e_1' + B(x, e_2')e_2' + B(x, e_3')e_3'.$$

En calculant $P_F(v)$ où $v = (1, 2, -2, 2)$, on trouve:

$$P_F(v) = \left(\frac{103}{67}, \frac{138}{67}, \frac{-131}{67}, \frac{110}{67}\right).$$

La distance de v à F est alors donnée par $\sqrt{q(v - P_F(v))}$, soit:

$$d(v, F) = \sqrt{\frac{12}{67}}.$$

Exercice 2

Le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres donne :

9 est valeur propre triple et les vecteurs propres associés sont :

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad ; e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix} \quad ; e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix};$$

0 est valeur propre simple et un vecteur propre associé est :

$$e_4 = \begin{pmatrix}0\\-2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Posons $e_4' = \begin{pmatrix}0\\ \frac{-2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{-1}{3}\end{pmatrix}$.

On peut remarquer que e_4' est orthogonal à e_1, e_2 *et* e_3. Ainsi, il reste à orthonormaliser la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ par le procédé de Schmidt.

Posons donc $e_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

On voit que e_2 est orthogonal à e_1, on pose donc : $e_2' = \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\\ \frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

Posons $\tilde{e}_3 = e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$. On veut que : $\langle \tilde{e}_3, e_1' \rangle = 0$ et $\langle \tilde{e}_3, e_2' \rangle = 0$. Ces conditions nous donnent le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 0 = \langle e_3, e_1' \rangle + \alpha \langle e_1, e_1' \rangle + \beta \langle e_2, e_1' \rangle \\ \\ 0 = \langle e_3, e_2' \rangle + \alpha \langle e_1, e_2' \rangle + \beta \langle e_2, e_2' \rangle. \end{cases}$$

ce qui tout calcul fait donne : $\tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et donc $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{5}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$.

Une base orthonormale de vecteurs propres est $\{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$.

Exercice 3

a) A est une matrice orthogonale de déterminant -1.

- Recherche des vecteurs propres de A :

  -1 est la seule valeur propre réelle. Un vecteur propre unitaire associé est

$$e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

- Complétons e_1' pour former une base orthonormée directe de E.

  On peut choisir $e_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $e_3' = e_1' \wedge e_2' = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

  L'endomorphisme représenté par A est donc la composée d'une symétrie par rapport au plan $Vect\{e_2', e_3'\}$ (ou d'équation $x - y + z = 0$) et d'une rotation d'axe orienté par e_1' et d'angle θ que l'on va préciser plus loin. Dans la base orthonormée directe $\{e_1', e_2', e_3'\}$, A s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Calcul de l'angle θ :

  Le calcul de la trace donne : $Tr(A) = -1 + 2\cos\theta = 0$, soit $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

- Signe de $\sin\theta$:

Soit $x = (1,0,0)$. Alors $Ax = (0,1,0)$. Le signe de $\sin\theta$ est donné par :

$$\det(x, Ax, e'_1) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} > 0,$$

donc $\sin\theta > 0$ pour ce choix d'orientation de e'_1. Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

REMARQUE

Si on pose

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \text{alors } P^T AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A'.$$

b) B est une matrice orthogonale de déterminant $+1$.

- Recherche des valeurs propres de B

1 est la seule valeur propre réelle. Un vecteur propre unitaire associé est :

$$e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}.$$

Complétons e'_1 pour former une base orthonormée directe de E.

On peut choisir $e'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ *et* $e'_3 = e'_1 \wedge e'_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{110}} \\ \frac{10}{\sqrt{110}} \\ \frac{-1}{\sqrt{110}} \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme représenté par B est la rotation d'axe orienté par e_1' et d'angle θ que l'on va préciser plus loin. Dans la base orthonormée directe $\{e_1', e_2', e_3'\}$, la matrice de B s'écrit :

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Calcul de l'angle θ

  Le calcul de la trace donne : $Tr(A) = 1 + 2\cos\theta = \dfrac{16}{9}$, soit $\cos\theta = \dfrac{7}{18}$.

- Signe de $\sin\theta$

  Soit $x = (1,0,0)$. Alors $Ax = (0,1,0)$. Le signe de $\sin\theta$ est donné par :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{9} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{-4}{9} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} = \frac{-5}{9\sqrt{11}} < 0,$$

donc $\sin\theta < 0$ pour ce choix d'orientation de e_1'.

REMARQUE

Si on pose :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{110}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{10}{\sqrt{110}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{110}} \end{pmatrix}, \quad \text{alors :}$$

$$Q^T B Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{18} & \frac{5\sqrt{11}}{18} \\ 0 & \frac{-5\sqrt{11}}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix} = B'.$$

Exercice 4

I est le milieu de $[AD]$, donc I est barycentre de $\{(A,1),(D,1)\}$. Ainsi, pour tout M de E,

$$2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}. \qquad (*)$$

De plus, K est barycentre de $\{(A,1),(B,2)\}$, donc, pour tout M de E,

$$3\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}. \qquad (**)$$

Remplaçons $\overrightarrow{MA}$ dans (**) par son expression donnée par (*) :

$$3\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MB}$$

Légitimons maintenant le choix de M :

On choisit $M = G$ barycentre de $\{(D,-1),(B,2)\}$, ainsi :

$$-2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Ce choix de G montre que G, B, D sont alignés.

Or, G vérifie de plus : $3\overrightarrow{GK} = 2\overrightarrow{GI}$, donc G, K, I sont alignés.

Ainsi, les droites (KI) et (BD) sont concourantes en le point G que l'on a défini comme le barycentre de $\{(D,-1),(B,2)\}$.

De la même manière, on montre que les droites (JL) et (BD) sont concourantes en ce même point G.

Les droites (IK) et (JL) sont sécantes en G, donc coplanaires : les points I, K, J, L sont donc coplanaires.

Exercice 5

1) On écrit le système définissant $\mathcal{D}_1$ sous la forme :

$$\begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{x-2}{3} \\ z = \dfrac{7-5x}{3} \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est : $\vec{u} = (3,1,-5)$ et $A(5,1,-6) \in D_1$.

De la même manière, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est $\vec{v} = (3,2,\alpha)$ et $B(1,0,-1) \in D_2$.

Les droites sont concourantes si et seulement si $\det(\overrightarrow{BA}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire pour $\alpha = -10$.

Le point de concourt est alors déterminé par le système linéaire :

$$\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y+z-3=0 \\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}. \end{cases}$$

On trouve le point I de coordonnées $I\left(0,\dfrac{-2}{3},\dfrac{7}{3}\right)$.

2) Soit $M(X,Y,Z)$, un point de ce plan que l'on note $\mathcal{P}$. Alors $\det(\overrightarrow{BM},\vec{u},\vec{v})=0$, ce qui donne : $\begin{vmatrix} X-1 & 3 & 3 \\ Y & 1 & 2 \\ Z+1 & -5 & -10 \end{vmatrix}=0$, soit :

$$5Y+Z+1=0.$$

3) Cette droite a pour vecteur directeur un vecteur normal de $\mathcal{P}$: $\vec{n}=(0,5,1)$ par exemple.

Les équations paramétriques de cette droite sont donc :

$$\begin{cases} x=0+0\times\lambda \\ y=-4+5\lambda\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}. \\ z=1+1\lambda \end{cases}$$

7. Sujet n° 7

a) Énoncé

Questions de cours :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Soit u un endomorphisme de E.

1) Qu'est ce qu'un polynôme annulateur de u ?
2) Donner la définition du polynôme minimal m_u de u.
3) Montrer que toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u.
4) Montrer que tout polynôme annulateur de u est multiple de m_u.

Exercice 1

1) Pour quelles valeurs du réel a la matrice suivante est-elle diagonalisable?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Pour $a = 4$,

a) Diagonaliser la matrice A.

b) Résoudre le système différentiel $\dfrac{dX}{dt}(t) = AX(t)$.

Exercice 2

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

2) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

3) Déterminer une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.

4) Calculer le polynôme minimal de A et en déduire l'expression de A^{-1} et de A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

5) Résoudre l'équation de récurrence linéaire: $X_{n+1} = AX_n$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On considère un endomorphisme u de E tel que $u^3 = u^2$, $u^2 \neq u$ et $u \neq 0$.

1) Montrer que $Sp(u) \subset \{0,1\}$.

2) Montrer que les valeurs propres de u sont 0 et 1.

3) Montrer que u n'est pas diagonalisable.

4) Établir que $E = \mathrm{Im}(u^2) \oplus \ker(u^2)$.

5) Vérifier que pour tout $y \in \mathrm{Im}(u^2)$, $u(y) = y$.

Exercice 4

Soit b la forme définie sur $(\mathbb{R}_2[X])^2$ par :

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}_2[X], b(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(-t)dt.$$

1) Montrer que b est une forme bilinéaire et donner sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Donner les parties symétrique et antisymétrique de b et leur matrice correspondante dans la base canonique.
3) On considère le système $B' = \{1-X, X-X^2, X^2\}$.
   a) Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de b dans cette base.
   b) En déduire l'expression de b dans cette base.

b) Corrigé

Questions de cours :

1) Un polynôme P est dit annulateur de u si et seulement si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, c'est-à-dire tel que $\forall x \in E, P(u)(x) = 0_E$.
2) On appelle polynôme minimal de u le polynôme **unitaire**, **annulateur** de u, **de plus petit degré**.
3) Soit x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. Alors $u(x) = \lambda x$. Notons de plus $m_u(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

   On a :

$$\begin{aligned} 0 = m_u(u)(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i u^i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i x, \text{ car } \forall i \in \{1,\dots,n\},\ u^i(x) = \lambda^i x, \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i\right).x \\ &= m_u(\lambda).x \end{aligned}$$

   Or, $x \neq 0$, donc $m_u(\lambda) = 0$, donc λ est racine du polynôme minimal m_u.
4) Soit P un polynôme minimal de u.

   Effectuons la division euclidienne de P par m_u. Il existe deux polynômes Q et R tels que :

$$P = Qm_u + R.$$

Supposons, dans un premier temps, que $R \neq 0$; dans ce cas, $\deg(R) < \deg(m_u)$.

On a donc : $P(u) = Q(u) \circ m_u(u) + R(u)$. Mais, $P(u) = 0$ et $m_u(u) = 0$ donc $R(u) = 0$.

Finalement, R est un polynôme annulateur de u tel que $\deg(R) < \deg(m_u)$, ce qui contredit la définition du polynôme minimal.

On en déduit donc que $R = 0$ puis que $P = Qm_u$, c'est-à-dire que P est multiple de m_u.

Exercice 1

1) Le calcul du polynôme caractéristique de A donne :

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & a & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(\lambda+2)^2.$$

Les valeurs propres de A sont donc $\{-2,2\}$.

Examinons maintenant la dimension des sous-espaces propres.

- Sous-espace propre associé à la valeurs propre 2

  Soit $(x,y,z,t) \in \ker(A-2I)$. Alors on a le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} -z+t=0 & (1) \\ 4x-4y-z+t=0 & (2) \\ -x+y=0 & (3) \\ -x+y+az-4t=0 & (4). \end{cases}$$

  (1) donne $z=t$; (2) donne $y=x$; (4) donne $az=4t$ soit $(a-4)t=0$.

  Deux cas se présentent alors, suivant que $a=4$ ou $a \neq 4$:

  i) 1er cas : $a=4$

  Le système linéaire précédent devient :

$$\begin{cases} z=t & (1) \\ x=y & (2) \end{cases}$$

c'est-à-dire :
$$\begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = t \\ t = t \end{cases}, (y,t) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut choisir $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres associés à la valeur propre 2 : dans ce cas, A est diagonalisable.

ii) 2e cas : $a \neq 4$

Le système linéaire précédent devient :
$$\begin{cases} z = t & (1) \\ x = y & (2) \\ az - 4t = 0 & (3) \end{cases}$$

On a donc $y = x$; $z = t$ et $az = 4t$. Donc $at = 4t$, soit $(4-a)t = 0$.

Comme $a \neq 4$, alors $t = 0$.

On a alors :
$$\begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

On ne peut choisir que $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre associé à la valeur propre 2 : dans ce cas, A n'est pas diagonalisable.

- Le sous-espace propre associé à la valeurs propre -2.

  Soit $(x,y,z,t) \in \ker(A+2I)$. Alors, on a le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} 4x - z + t = 0 & (1) \\ 4x - z + t = 0 & (2) \\ -x + y + 4z = 0 & (3) \\ -x + y + az = 0 & (4) \end{cases}$$

On voit immédiatement que l'on est obligé de distinguer deux cas :

i) 1er cas : $a = 4$

Le système linéaire devient :

$$\begin{cases} 4x - z + t = 0 & (1) \\ -x + y + 4z = 0 & (2) \end{cases}$$

On a donc $t = z - 4x$ et $y = x - 4z$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x \\ y = x - 4z \\ z = z \\ t = z - 4x \end{cases}, (x, z) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut choisir $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres associés à la valeur propre -2 : dans ce cas, A est diagonalisable.

ii) 2e cas : $a \neq 4$

Le système linéaire devient :

$$\begin{cases} 4x - z - t = 0 & (1) \\ -x + y + 4z = 0 & (2) \\ -x + y + az = 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant $(3) - (2)$, on a : $(a - 4)z = 0$, c'est-à-dire $z = 0$, puisque $a \neq 4$.
Ainsi, on a $y = x$ et $4x = t$,

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = 0 \\ t = 4x \end{cases}, x \in \mathbb{R}.$$

On ne peut choisir que $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre associé à la valeur propre -2.

Dans ce cas, A n'est pas diagonalisable.

2) a) On a vu précédemment que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 2.

De plus,

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés à la valeur propre -2.

Posons P la matrice de passage définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons son inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \Delta.$$

b) Résolution du système différentiel :

La relation $\frac{dX}{dt}(t) = AX(t)$ s'écrit :

$$\frac{dX}{dt}(t) = P\Delta P^{-1}X(t),$$

soit :

$$P^{-1}\frac{dX}{dt}(t) = \frac{d\left(P^{-1}X\right)}{dt}(t) = \Delta P^{-1}X(t).$$

Posons $Z = P^{-1}X$. On en déduit que :

$$\frac{dZ}{dt}(t) = \Delta Z(t),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} z_1'(t) = 2z_1(t) \\ z_2'(t) = 2z_2(t) \\ z_3'(t) = -2z_3(t) \\ z_4'(t) = -2z_4(t), \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} z_1(t) = Ae^{2t} \\ z_2(t) = Be^{2t} \\ z_3(t) = Ce^{-2t} \\ z_4(t) = De^{-2t}. \end{cases}$$

Ainsi, X est donné par :

$$X(t) = PZ(t),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_1(t) = Ae^{2t} + Ce^{-2t} \\ x_2(t) = Ae^{2t} + Ce^{-2t} - 4De^{-2t} \\ x_3(t) = Be^{2t} + De^{-2t} \\ x_4(t) = Be^{2t} - 4Ce^{-2t} + De^{-2t}. \end{cases}$$

Exercice 2

1) Le calcul du polynôme caractéristique de A donne :

$$\det\begin{pmatrix}-2-\lambda & -1 & 1 & 2\\ 1 & -4-\lambda & 1 & 2\\ 0 & 0 & -5-\lambda & 4\\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda\end{pmatrix} = (\lambda+3)^4.$$

2) Supposons que A est diagonalisable. Il existe une matrice inversible P telle que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

On a donc $PAP^{-1} = 3I$, c'est-à-dire

$$A = P^{-1}(3I)P = 3I \neq A.$$

Donc A n'est pas diagonalisable.

3) Réduite de Jordan de la matrice A :

Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$P(X) = (3+X)^4.$$

Posons :

$$M = A + 3I = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

On montre que $rg(M) = 2$, donc $\dim\ker(M) = 2$.

Calculons :

$$M^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On a clairement $rg(M^2) = 1$ donc $\dim\ker(M^2) = 3$.

De plus :

$$M^3 = 0.$$

On a clairement $\dim\ker(M^2) = 3$.

La réduite de Jordan de A comporte donc deux blocs associés à la valeur propre 3 de taille respectivement 1 et 3.

Construisons une base associée à cette réduction:

Prenons

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker\left(M^3\right) \setminus \ker\left(M^2\right)$$

puis

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin:

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, une base de $\ker(M)$ est:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Posons P la matrice de passage définie:

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & -4 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} & \frac{-3}{16} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = J.$$

4) Compte tenu de sa réduction de Jordan, le polynôme minimal de A est :

$$m_A(X) = (X+3)^3.$$

- Calcul de A^{-1} :

  On a :

  $$m_A(A) = 0,$$

  donc

  $$A^3 + 9A^2 + 27A + 27I = 0.$$

  On peut donc écrire que :

  $$A\left(A^2 + 9A + 27I\right) = -27I,$$

  c'est-à-dire :

  $$A\left(\frac{-1}{27}\left(A^2 + 9A + 27I\right)\right) = I.$$

  La matrice A est inversible et son inverse est :

  $$A^{-1} = \frac{-1}{27}\left(A^2 + 9A + 27I\right),$$

  c'est-à-dire :

  $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{-14}{27} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{27} & \frac{-14}{27} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}.$$

- Calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}$:

  La division euclidienne de X^n par $m_A(X)$ donne :

  $$X^n = m_A(X)Q(X) + R(X) \quad (1),$$

  avec $R = 0$ ou $\deg R < 3$.

On pose donc: $R(X) = aX^2 + bX + c.$

De plus, pour $X = -3$, on a:

$$(-3)^n = 9a - 3b + c.$$

En dérivant (1), puis en prenant $X = -3$, on obtient:

$$n(-3)^{n-1} = -6a + b.$$

En dérivant à nouveau (1), puis en prenant $X = -3$, on obtient:

$$n(n-1)(-3)^{n-2} = 2a.$$

Les coefficients a, b, c vérifient le système linéaire:

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = (-3)^n \\ -6a + b = n(-3)^{n-1} \\ 2a = n(n-1)(-3)^{n-2}. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne:

$$\begin{cases} a = \dfrac{n(n-1)}{2}(-3)^{n-2} \\ b = \left(-n^2 + 2n\right)(-3)^{n-1} \\ c = \dfrac{-9}{2}n(-3)^{n-2} + (-3)^n + 3n(-3)^{n-1} + \dfrac{9}{2}n^2(-3)^{n-2}, \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} A^n \; = \; & \left[\frac{n(n-1)}{2}(-3)^{n-2}\right]A^2 + \left[\left(-n^2 + 2n\right)(-3)^{n-1}\right]A \\ & + \left[(-3)^n\left(\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1\right)\right]I. \end{aligned}$$

5) Résolution du système différentiel $\dfrac{dX}{dt}(t) = AX(t)$.

Vu que:

$$A = PJP^{-1},$$

on a:

$$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

De plus,

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & \frac{t^2}{2}e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{tJ}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-3t}+te^{-3t} & -te^{-3t} & te^{-3t}-2t^2e^{-3t} & 4t^2e^{-3t}+2te^{-3t} \\ te^{-3t} & e^{-3t}-te^{-3t} & te^{-3t}-2t^2e^{-3t} & 4t^2e^{-3t}+2te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t}-2te^{-3t} & 4te^{-3t} \\ 0 & 0 & -te^{-3t} & e^{-3t}+2te^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution X du système différentiel est donnée par :

$$X(t) = e^{tA}U_0,$$

où U_0 est la condition initiale.

Exercice 3

1) On pose P le polynôme défini par : $P(X) = X^3 - X^2 = X^2(X-1)$.

   P est un polynôme annulateur de u, donc $Sp(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P. Donc $Sp(u) \subset \{0\,;1\}$.

2) On note m_u le polynôme minimal de u. Le polynôme m_u divise le polynôme P, donc :

$$m_u(X) = X\ ;\ X^2\ ;\ X-1\ ;\ X(X-1)\ ;\ X^2(X-1).$$

   Les trois premiers cas ne sont pas possibles car $u \neq 0$, $u^2 \neq 0$, et $u \neq Id$.

   Les deux derniers polynômes ont pour racines 0 et 1, donc $Sp(u) = \{0\,;1\}$.

3) Le cas $m_u(X) = X(X-1)$ est impossible, sinon, on aurait $u^2 = u$, ce qui est exclu.

   Le polyôme minimal de u est donc $m_u(X) = X^2(X-1)$.

   Le polynôme m_u est scindé mais ses racines ne sont pas simples : u n'est donc pas diagonalisable.

4) • Il est évident que $\mathrm{Im}(u^2) \oplus \ker(u^2) \subset E$.

• Réciproquement :

Soit $x \in E$.

On écrit que $x = \underbrace{x - u^2(x)}_{=x_1} + \underbrace{u^2(x)}_{=x_2}$.

Calculons $u^2(x_1)$:

$$\begin{aligned} u^2(x_1) &= u^2\left(x - u^2(x)\right) = u^2(x) - u^4(x) \\ &= u^2(x) - u^3\left(u(x)\right) \\ &= u^2(x) - u^2\left(u(x)\right) \text{ car } u^3 = u^2, \\ &= u^2(x) - u^3(x) \\ &= 0 \text{ car } u^3 = u^2. \end{aligned}$$

Ainsi $x - u^2(x) \in \ker\left(u^2\right)$.

De plus, $x_2 = u^2(x) \in \mathrm{Im}\left(u^2\right)$.

Donc :

$$E = \mathrm{Im}\, u^2 + \ker u^2.$$

Il reste à montrer que $\ker\left(u^2\right) \cap \mathrm{Im}\left(u^2\right) = \{0\}$.

Prenons y dans $\ker\left(u^2\right) \cap \mathrm{Im}\left(u^2\right)$.

Alors $u^2(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x)$.

On a donc : $u^4(x) = 0$. Or, on sait que $u^3 = u^2$, donc $u^4 = u^3 = u^2$, donc :

$$u^4(x) = u^3(x) = u^2(x) = y = 0.$$

D'où le résultat.

5) Soit $y \in \mathrm{Im}\left(u^2\right)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u^2(x)$.

On a :

$$\begin{aligned} u(y) &= u^3(x) \\ &= u^2(x) \text{ (car } u^3 = u^2) \\ &= y. \end{aligned}$$

Exercice 4

1) Soient P, Q et R appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On vérifie facilement que:

$$\begin{cases} b(P+R,Q) = b(P,Q) + b(R,Q), \\ b(P,Q+R) = b(P,Q) + b(P,R), \\ \\ b(\lambda P,Q) = \lambda b(P,Q), \\ b(P,\lambda Q) = \lambda b(P,Q). \end{cases}$$

La matrice de b par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2) La partie symétrique de b, notée b_S, est donnée par:

$$b_S(P,Q) = \frac{1}{2}[b(P,Q) + b(Q,P)].$$

La matrice de b_S est:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

De même, la partie antisymétrique de b, notée b_a, est donnée par:

$$b_a(P,Q) = \frac{1}{2}[b(P,Q) - b(Q,P)].$$

La matrice de b_a est:

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

3) a) Posons P la matrice donné par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible, donc le système $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
La matrice de b dans cette base est donnée par :

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{-2}{15} & \frac{1}{20} \\ \frac{7}{12} & \frac{-9}{20} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

b) Posons P le polynôme défini par

$$P(X) = a_1(1-X) + a_2\left(X - X^2\right) + a_3X^2$$

et Q le polynôme défini par :

$$Q(X) = b_1(1-X) + b_2\left(X - X^2\right) + b_3X^2.$$

Alors $b(P,Q)$ est donnée par :

$$b(P,Q) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{-2}{15} & \frac{1}{20} \\ \frac{7}{12} & \frac{-9}{20} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

8. Sujet n° 8

a) Énoncé

Questions de cours :

Soit E un espace euclidien de dimension n.

1) Dans le cas où $n = 3$, rappeler la définition du produit mixte et du produit vectoriel.

2) Ecrire les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski dans le cas où $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

3) Montrer que, si une matrice réelle A est symétrique, alors deux vecteurs propres de A associés à des valeurs distinctes sont orthogonaux.

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit l'endomorphisme ϕ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall X \in \mathbb{R},\ \phi(P) = P(1-X).$$

1) Vérifier que $\phi \circ \phi = id_E$. En déduire que ϕ est diagonalisable.
2) En considérant les polynômes $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2$ et $\left(X - \frac{1}{2}\right)^3$, montrer que les valeurs propres de ϕ sont -1 et 1.
3) On note dans la suite :

$$F_1 = \left\{P \in E,\ \phi(P) = P\right\},$$
$$F_2 = \left\{P \in E,\ \phi(P) = -P\right\}.$$

   a) Soit $P \in F_1$, On pose $G(X) = P\left(\frac{1}{2} + X\right)$. Vérifier que $G(X) = G(-X)$. En déduire une base de F_1.
   b) En procédant comme à la question (a), déterminer une base de F_2.
   c) Donner la matrice de ϕ dans une base de vecteurs propres. Que représente ϕ par rapport à F_1 et F_2.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B}$ une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de E. Soit q la forme quadratique définie par :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2x_1x_2 + 4\alpha x_1x_3 + 4\alpha x_2x_3 + 2\mu x_2x_4,$$

où (x_1, x_2, x_3, x_4) sont les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

1) Déterminer la forme polaire de q ainsi que la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.
2) Donner une réduction en carrées de Gauss de la forme quadratique q. Préciser une base de E orthogonale pour q, ainsi que le rang, la signature de q en fonction des paramètres réels α, λ et μ.
3) Pour quelles valeurs de α, λ et μ, la forme quadratique q définit-elle un produit scalaire ?

4) On pose $\lambda = 1, \alpha = \mu = 0$. On considère le sous-espace vectoriel F de E défini par :

$$F = \left\{(x_1 + x_2, -x_1 + x_2, x_1 - x_2, 0),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

a) Déterminer une base de F orthonormale pour q.

b) Soit $v = e_1 + e_2 + e_3$. Calculer la projection q-orthogonale $p_F(v)$ de v sur F. Calculer $d(v, F)$, où d est la distance associée à q.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1) On note b une forme bilinéaire sur E. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, rappeler la relation liant les matrices A et A' de b dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.

2) Quelle est la matrice d'un produit scalaire sur E par rapport à une base orthonormale pour ce produit scalaire ?

3) On considère les vecteurs $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,1,0)$ et $f_3 = (1,0,0)$ de E. Vérifier que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E. Déterminer un produit scalaire b sur E pour lequel $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base orthonormale.

Exercice 4

Soit E un espace euclidien de dimension 3. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E. On considère les endomorphismes u et v dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$a)\ A_u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad b)\ A_v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étudier les endomorphismes u et v.

Exercice 5

On considère l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$.

1) Déterminer les équations canoniques et paramétriques de la droite $\mathcal{D}_1$, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations normales : $x + y + 3z - 1 = 0$ et $x + y + z + 3 = 0$ respectivement.

2) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et passant par $A(-1,1,1)$.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la droite $\mathcal{D}_2$ d'équations canoniques:
$$\frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{\alpha}.$$

a) Vérifier que $\mathcal{D}_2$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

b) Déterminer la valeur de α pour laquelle $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes.

b) Corrigé

Questions de cours:

1) Le produit vectoriel de deux vecteurs u et v de E est l'**unique vecteur** noté $u \wedge v$, tel que:
$$\forall w \in E, \langle u \wedge v, w\rangle = \det(u, v, w).$$

Le produit mixte des trois vecteurs u, v, w est **le réel**, noté $[u, v, w]$, tel que:
$$[u, v, w] = \det(u, v, w).$$

2) • Inégalité de Cauchy-Schwarz:
$$|\langle P, Q\rangle|^2 \leq \langle P, P\rangle \times \langle Q, Q\rangle,$$

soit ici:
$$\left|\int_0^1 P(x)Q(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 (P(x))^2\,dx} \times \sqrt{\int_0^1 (Q(x))^2\,dx}.$$

• Inégalité de Minkowski:
$$\sqrt{\int_0^1 (P(x)+Q(x))^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 (P(x))^2\,dx} + \sqrt{\int_0^1 (Q(x))^2\,dx}.$$

3) Soient u et v $\left(u \neq 0 \text{ et } v \neq 0\right)$ deux vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres λ et μ, alors:
$$\begin{cases} Au = \lambda u, \\ Av = \mu v. \end{cases}$$

A est symétrique donc, par définition, $\forall (x, y) \in E^2, \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

On a donc: $\lambda\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = \langle \mu u, v\rangle = \mu\langle u, v\rangle$.

Ainsi $\lambda\langle u, v\rangle = \mu\langle u, v\rangle$, donc $(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0$.

Comme λ et μ sont deux valeurs propres distinctes, alors $\lambda - \mu \neq 0$ et donc $\langle u, v\rangle = 0$.

Donc, deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Exercice 1

1) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\phi(P)(X) = P(1-X) = Q(X)$. De plus:

$$\phi(Q)(X) = Q(1-X) = P(1-(1-X)) = P(X).$$

On a donc:

$$\phi(\phi(P))(X) = P(X),$$

donc $\phi \circ \phi = id_E$.

Le polynôme R défini par $R(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de ϕ. Le polynôme minimal de ϕ (noté m_ϕ) est donc un diviseur de R.

Donc $m_\phi(X) = X^2 - 1$ ou $X - 1$ ou $X + 1$.

Dans tous les cas, m_ϕ est scindé et ses racines sont simples, donc ϕ est diagonalisable.

2) On calcule $\phi\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)$ et $\phi\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^3\right)$. On trouve:

$$\phi\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\phi\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^3\right) = -\left(X - \frac{1}{2}\right)^3.$$

On peut voir que -1 et 1 sont deux valeurs propres de ϕ. De plus les racines du polynôme minimal m_ϕ sont incluses dans $\{-1,1\}$, donc -1 et 1 sont les deux seules valeurs propres possibles de ϕ. Donc $Sp(\phi) = \{-1,1\}$.

3) a) Soit $P \in F_1$. On peut remarquer, avant toute chose, que P vérifie:

$$\forall Z \in \mathbb{R}, P(1-Z) = P(Z).$$

Calculons maintenant $G(-X)$:

$$\begin{aligned} G(-X) &= P\left(\frac{1}{2} - X\right) \\ &= P\left(1 - \left(\frac{1}{2} + X\right)\right) \\ &= P\left(\frac{1}{2} + X\right), \textit{car } P(1-Z) = P(Z), \left(\textit{avec } Z = \frac{1}{2} + X\right), \\ &= G(X). \end{aligned}$$

G est donc un polynôme pair, de degré inférieur ou égal à n: donc $G(X) = 1$ ou X^2 ou X^4 ou ... X^{2p} avec $2p = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{sinon.} \end{cases}$

En notant que $P(X)=G\left(X-\dfrac{1}{2}\right)$, une base de F_1 est donc :

$$\mathcal{B}_1=\left\{1,\left(X-\frac{1}{2}\right)^2,\left(X-\frac{1}{2}\right)^4,\dots,\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2p}\right\}.$$

b) En prenant $P\in F_2$ et en remarquant cette fois-ci que P vérifie :

$$\forall Z\in\mathbb{R},\ P(1-Z)=-P(Z),$$

On obtient : $G(-X)=-G(X)$.

G est donc un polynôme impair, de degré inférieur ou égal à n : donc $G(X)=X$ ou X^3 ou X^5 ou .... X^{2q+1} avec $q=n-p-1$.

En notant que $P(X)=G\left(X-\dfrac{1}{2}\right)$, une base de F_1 est donc :

$$\mathcal{B}_2=\left\{\left(X-\frac{1}{2}\right),\left(X-\frac{1}{2}\right)^3,\left(X-\frac{1}{2}\right)^5,\dots,\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2q+1}\right\}.$$

c) La matrice de ϕ dans une base de vecteurs propres est :

$$M(\phi)=\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&&&0\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&&&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&1\end{matrix}}^{p+1} & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{matrix}-1&0&\cdots&0&0\\0&-1&&&0\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&&&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&-1\end{matrix}}_{q+1}\end{pmatrix}$$

L'endomorphisme ϕ est donc la symétrie par rapport à F_1 et parallèlement à F_2.

Exercice 2

1) La forme polaire de q, que l'on note b_q est :

$$\begin{aligned} b_q\big((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\big) &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + \lambda x_4y_4 \\ &+ x_1y_2 + y_1x_2 + 2\alpha x_1y_3 + 2\alpha y_1x_3 \\ &+ 2\alpha x_2y_3 + 2\alpha y_2x_3 + \mu x_2y_4 + \mu y_2x_4. \end{aligned}$$

La matrice de q (ou de b_q) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha & 2\mu \\ 2\alpha & 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2) La réduction en carrés de Gauss est donnée par :

$$q(x) = (x_1 + x_2 + \alpha x_3)^2 + (x_2 + \mu x_4)^2 + (\lambda - \mu^2)x_4^2 + (1 - 4\alpha^2)x_3^2.$$

- Déterminons le rang et la signature de q en fonction de α, λ et μ :

$Si\ \lambda - \mu^2 > 0,$

$si\ 1-4\alpha^2 > 0,$ alors $rg(q) = 4$ et $sign(q) = (4,0)$

$si\ 1-4\alpha^2 = 0,$ alors $rg(q) = 3$ et $sign(q) = (3,0)$

$si\ 1-4\alpha^2 < 0,$ alors $rg(q) = 4$ et $sign(q) = (3,1).$

$Si\ \lambda - \mu^2 = 0,$

$si\ 1-4\alpha^2 > 0,$ alors $rg(q) = 3$ et $sign(q) = (3,0)$

$si\ 1-4\alpha^2 = 0,$ alors $rg(q) = 2$ et $sign(q) = (2,0)$

$si\ 1-4\alpha^2 < 0,$ alors $rg(q) = 3$ et $sign(q) = (2,1).$

$Si\ \lambda - \mu^2 < 0,$

$si\ 1-4\alpha^2 > 0,$ alors $rg(q) = 4$ et $sign(q) = (3,1)$

$si\ 1-4\alpha^2 = 0,$ alors $rg(q) = 3$ et $sign(q) = (2,1)$

$si\ 1-4\alpha^2 < 0,$ alors $rg(q) = 4$ et $sign(q) = (2,2).$

- Déterminons maintenant une base orthonormale pour q (nous supposerons pour simplifier que $1 - 4\alpha^2 > 0$ et $\lambda - \mu^2 > 0$)

Posons

$$\begin{cases} X = x_1 + x_2 + \alpha x_3 \\ Y = x_2 + \mu x_4 \\ Z = \sqrt{1-4\alpha^2}\, x_3 \\ T = \sqrt{\lambda - \mu^2}\, x_4. \end{cases}$$

Inversons ce système:

$$\begin{cases} x_1 = X - Y + \mu \dfrac{T}{\sqrt{\lambda-\mu^2}} - \alpha \dfrac{Z}{\sqrt{1-4\alpha^2}} \\ x_2 = Y - \mu \dfrac{T}{\sqrt{\lambda-\mu^2}} \\ x_3 = \dfrac{Z}{\sqrt{1-4\alpha^2}} \\ x_4 = \dfrac{T}{\sqrt{\lambda-\mu^2}}. \end{cases}$$

Posons maintenant P la matrice suivante:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda-\mu^2}} & -\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-4\alpha^2}} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda-\mu^2}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-4\alpha^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda-\mu^2}} \end{pmatrix}.$$

On définit la base orthogonale pour q par:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda-\mu^2}} \\ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-4\alpha^2}} \\ 0 \end{pmatrix}; v_4 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-4\alpha^2}} \\ -\dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda-\mu^2}} \\ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda-\mu^2}} \end{pmatrix}.$$

3) La forme quadratique q est un produit scalaire lorsque $rg(q) = 4$ et $sign(q) = (4,0)$, c'est-à-dire pour:

$$\begin{cases} \lambda - \mu^2 > 0, \\ 1 - 4\alpha^2 > 0. \end{cases}$$

4) Pour $\alpha = \mu = 0$ et $\lambda = 1$, on a $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

a) Une base de F est $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Orthonormalisons cette base par le procédé de Gram-Schmidt, vis-à-vis du produit scalaire associé à q, que l'on note $\langle .,. \rangle_q$.

On a $q(e_1) = 2$, posons alors $e_1' = \dfrac{e_1}{\sqrt{q(e_1)}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Posons $\tilde{e}_2 = e_2 + \lambda e_1$ avec $\langle \tilde{e}_2, e_1' \rangle_q = 0$.

On a donc $\langle \tilde{e}_2, e_1' \rangle_q = 0 = \langle e_2, e_1' \rangle_q + \lambda \langle e_1, e_1' \rangle_q$. Donc $\lambda = 1$. Ainsi $\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $q(\tilde{e}_2) = 4$.

Donc, si on pose $e_2' = \dfrac{\tilde{e}_2}{\sqrt{q(\tilde{e}_2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors la base

$$\left\{ e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} ; e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base orthonormale pour q.

b) La projection q-orthogonale $p_F(.)$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ p_F(x) = \langle x, e_1' \rangle e_1' + \langle x, e_2' \rangle e_2'.$$

En prenant $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient $p_F(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La distance $d(v, F)$ est donnée par :

$$d(v,F) = \sqrt{\langle v - p_F(v), v - p_F(v) \rangle_q} = \sqrt{q\left(v - p_F(v)\right)} = \sqrt{2}.$$

Exercice 3

1) Si on note P la matrice de passage de B à B', alors :

$$A' = P^T A P.$$

2) La matrice d'un produit scalaire dans une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est :

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Si, de plus, la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, alors cette matrice devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I.$$

3) On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$.

On note, de plus, $b(.,.)$ le produit scalaire recherché et P la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec ce choix de notation, on a : $\forall i \in \{1,2,3\},\ f_i = Pe_i$.

On veut : $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2,\ b(f_i, f_i) = \delta_{i,j}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} b(f_i, f_j) &= \delta_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle \\ &= e_i^T e_j \\ &= \left(P^{-1} f_i\right)^T \left(P^{-1} f_j\right) \\ &= f_i^T \left(P^{-1}\right)^T \left(P^{-1}\right) f_j \\ &= f_i^T A f_j, \end{aligned}$$

où $A = \left(P^{-1}\right)^T \left(P^{-1}\right)$.

On prend donc :

$$b(X,Y) = X^T A Y,$$

où

$$A = \left(P^{-1}\right)^T \left(P^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Le calcul de $(A_u)^T (A_u)$ montrer que u est un endomorphisme orthogonal. De plus, $\det(A_u) = +1$.

a) Étude de l'endomorphisme u

- Recherche des valeurs propres de A_u

  1 est la seule valeur propre réelle. Un vecteur propre unitaire associé est :

$$e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

- Complétons e_1' pour former une base orthonormée directe de E.

  On peut choisir $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $e_3' = e_1' \wedge e_2' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme représenté par A_u est la rotation d'axe orienté par e_1' et d'angle θ que l'on va préciser plus loin. Dans la base orthonormée directe $\{e_1', e_2', e_3'\}$, la matrice de A_u s'écrit :

$$A_u' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Calcul de l'angle θ

  Le calcul de la trace donne : $Tr(A_u) = 1 + 2\cos\theta = \frac{5}{3}$, soit $cos\theta = \frac{1}{3}$.

- Signe de $\sin\theta$

  Soit $x = (1,0,0)$. Alors $A_u x = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Le signe de $\sin\theta$ est donnée par :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} > 0,$$

donc $\sin\theta > 0$ pour ce choix d'orientation de e_1'.

REMARQUE

Si on pose $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, alors $Q^T A_u Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A_u'$.

b) étude de l'endomorphisme v

A_v est une matrice orthogonale de déterminant -1.

- Recherche des vecteurs propres de A_v

  -1 est la seule valeur propre réelle. Un vecteur propre unitaire associé est :

$$e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Complétons e_1' pour former une base orthonormée directe de E.

On peut choisir $e_2' = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $e_3' = e_1' \wedge e_2' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme représenté par A_v est donc la composée d'une symétrie par rapport au plan $Vect\{e_2', e_3'\}$ et d'une rotation d'axe orienté par e_1' et d'angle θ que l'on va préciser plus loin. Dans la base orthonormée directe $\{e_1', e_2', e_3'\}$, A_v s'écrit :

$$A_v' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Calcul de l'angle θ

  Le calcul de la trace donne : $Tr(A_v) = -1 + 2\cos\theta = \frac{3}{5}$, soit $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

- Signe de $\sin\theta$

  Soit $x = (1,0,0)$. Alors $A_v x = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$. Le signe de $\sin\theta$ est donnée par :

$$\det(x, A_v x, e_1') = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} < 0,$$

donc $\sin\theta < 0$ pour ce choix d'orientation de e_1'.

REMARQUE

Si on pose : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$, alors

$$P^T A_v P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = A_v'.$$

Exercice 5

1) Résolvons le système linéaire :

$$\begin{cases} x+y+3z=1 & (1) \\ x+y+z=-3 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ donne $2z=4$ soit $z=2$ et $x+y=-5$.

Les équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$ sont :

$$\begin{cases} x=-y-5 \\ y=y \\ z=2 \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

Les équations canoniques de $\mathcal{D}_1$ sont :

$$\frac{x+5}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}.$$

2) Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, par exemple :

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, dire que $M(X,Y,Z)$ appartient à $\mathcal{P}$ signifie que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} X+1 \\ Y-1 \\ Z-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=0,$$

c'est-à-dire : $-X-1+Y-1=0$, soit :

$$-X+Y-2=0.$$

3) a) Donnons les équations paramétriques de $\mathcal{D}_2$:

$$\begin{cases} x=\lambda-2 \\ y=\lambda \\ z=\alpha\lambda+1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

De plus, $-x+y-z=-(\lambda-2)+\lambda-2=0$.

Donc $\mathcal{D}_2$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

b) Prenons un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, par exemple: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$, par exemple: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Soit $A(-2,0,1)$ appartenant à $\mathcal{D}_1$ et $B(-5,0,2)$ appartenant à $\mathcal{D}_2$.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes si et seulement si $\det\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{AB}\right) = 0$.

Le calcul donne $\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = -(2+3\alpha) = 0$.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes si et seulement si $\alpha = \dfrac{-2}{3}$.

Chapitre 11

Annexes

1. Équations de récurrence linéaire du premier ordre

Il s'agit dans cette partie de donner la forme générale des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'équation de récurrence linéaire du premier ordre : $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$.

a) On résout l'équation homogène $u_{n+1} = au_n$ dont la solution est de la forme :

$$u_n = \lambda a^n,$$

où λ est un réel quelconque.

b) On cherche une solution particulière u_n^* de l'équation complète $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$, selon la forme de la fonction φ, comme indiqué ci-après.

- Si φ est une constante b, alors une solution particulière u_n^* de l'équation complète $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$ est de la forme :

$$\begin{cases} u_n^* = nb \text{ si } a = 1, \\ u_n^* = \dfrac{b}{1-a} \text{ si } a \neq 1. \end{cases}$$

- Si φ est un polynôme de degré k, alors une solution particulière u_n^* de l'équation complète $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$ est de la forme :

$$\begin{cases} u_n^* = nQ_k(n) \text{ si } a = 1, \\ u_n^* = Q_k(n) \text{ si } a \neq 1, \end{cases}$$

où Q_k est un polynôme de degré k à déterminer.

- Si φ est de la forme $\varphi(n) = br^n$ ($r \neq 0$ et $r \neq 1$), alors une solution particulière u_n^* de l'équation complète $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$ est de la forme :

$$\begin{cases} u_n^* = \dfrac{b}{a} n r^n \text{ si } r = a, \\ u_n^* = \dfrac{b}{r-a} r^n \text{ si } r \neq a. \end{cases}$$

- Si φ est de la forme $\varphi(n) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$, $\theta \neq k\pi$, alors une solution particulière u_n^* de l'équation complète $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$ est de la forme :

$$u_n^* = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta),$$

avec α et β solutions de :

$$\begin{cases} \alpha(\cos\theta - a) + \beta\sin\theta = A, \\ -\alpha\sin\theta + \beta(\cos\theta - a) = B. \end{cases}$$

c) La solution générale de l'équation complète est obtenue en sommant la solution générale de l'équation homogène trouvée en a) et la solution particulière de l'équation complète trouvée en b).

2. Équations de récurrence linéaire du second ordre

Il s'agit dans cette partie de donner la forme générale des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'équation de récurrence linéairedu second ordre :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + \varphi(n).$$

a) On résout l'équation homogène $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ dont la solution est donnée par l'équation caractéristique associée :

$$r^2 - ar - b = 0.$$

- Si $\Delta > 0$, alors on note r_1 et r_2 les deux racines réelles de l'équation caractéristique et la solution de l'équation homogène est donnée par :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si $\Delta = 0$, alors on note r la racine double de l'équation caractéristique et la solution de l'équation homogène est donnée par :

$$u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

- Si $\Delta < 0$, alors on note r_1 et r_2 les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique et la solution de l'équation homogène est donnée par :
$$r_1 = \alpha + \beta i \text{ et } r_2 = \alpha - \beta i.$$

  Si on pose $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, alors on peut écrire r_1 et r_2 sous la forme trigonométrique:
$$r_1 = \rho(\cos\omega + i\sin\omega) \text{ et } r_2 = \rho(\cos\omega - i\sin\omega),$$

  et la solution de l'équation homogène est donnée par:
$$u_n = \rho^n\left(A\cos(n\omega) + B\sin(n\omega)\right).$$

b) On cherche une solution particulière u_n^* de l'équation complète :
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + \varphi(n),$$

selon la forme de la fonction φ, comme indiqué ci-après:

- Si φ est un polynôme de degré k, alors une solution particulière u_n^* de l'équation complète $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + \varphi(n)$ est de la forme:
$$\begin{cases} u_n^* = Q_k(n) \text{ si 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique,} \\ u_n^* = nQ_k(n) \text{ si 1 est racine simple de l'équation caractéristique,} \\ u_n^* = n^2Q_k(n) \text{ si 1 est racine double de l'équation caractéristique,} \end{cases}$$

  où Q_k est un polynôme de degré k à déterminer.

- Si φ est de la forme $\varphi(n) = br^n$ $(r \neq 0$ et $r \neq 1)$, alors une solution particulière u_n^* de l'équation complète $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + \varphi(n)$ est de la forme:
$$\begin{cases} u_n^* = \mu r^n \text{ si } r \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique,} \\ u_n^* = \mu n r^n \text{ si } r \text{ est racine simple de l'équation caractéristique,} \\ u_n^* = \mu n^2 r^n \text{ si } r \text{ est racine double de l'équation caractéristique.} \end{cases}$$

- Si φ est de la forme $\varphi(n) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$, alors une solution particulière u_n^* de l'équation complète $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + \varphi(n)$ est de la forme:
$$\begin{cases} u_n^* = n\left(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\right) \text{ si } \theta = \omega, \\ u_n^* = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta) \text{ sinon.} \end{cases}$$

c) La solution générale de l'équation complète est obtenue en sommant la solution générale de l'équation homogène trouvée en 1) et la solution particulière de l'équation complète trouvée en 2).

3. Équations différentielles du premier et second ordre

a) Équations différentielles du premier ordre $y' + a(x)y = f(x)$.

1) On résout l'équation sans second membre $y' + a(x)y = 0$ dont la solution est de la forme $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$, où la fonction A désigne une primitive de la fonction a.

2) On cherche une solution particulière de la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$ (Méthode de variation de la constante).

3) La solution générale de l'équation complète est obtenue en sommant la solution générale de l'équation sans second membre et la solution particulière de l'équation complète.

b) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

1) On résout l'équation sans second membre :

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

dont la solution est donnée par l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

- Si $\Delta > 0$, alors on note r_1 et r_2 les deux racines de l'équation caractéristique et la solution de l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ est donnée par :

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors on note r la racine double r de l'équation cractéristique et la solution de l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ est donnée par :

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{rx}.$$

- Si $\Delta < 0$, alors on note r_1 et r_2 les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique :

$$r_1 = \alpha + \beta i \; et \; r_2 = \alpha - \beta i.$$

Si on pose $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, alors on peut écrire r_1 et r_2 sous la forme trigonométrique :

$$r_1 = \rho(\cos\omega + i\sin\omega) \; et \; r_2 = \rho(\cos\omega - i\sin\omega),$$

et la solution de l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ est donnée par :

$$y(x) = e^{\rho x}\left(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right).$$

2) Recherche de solutions particulières de l'équation complète $ay'' + by' + cy = f$ (On se limite ici au cas où f est de la forme $f(x) = P(x)e^{sx}$ avec P est un polynôme).

Une solution particulière de l'équation complète $ay'' + by' + cy = f$ est de la forme $y(x) = Q(x)e^{sx}$ où Q est un polynôme tel que :

$$\begin{cases} \deg(Q) = \deg(P) \text{ si } s \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique,} \\ \deg(Q) = \deg(P) + 1 \text{ si } s \text{ est une racine simple de l'équation caractéristique,} \\ \deg(Q) = \deg(P) + 2 \text{ si } s \text{ est une racine double de l'équation caractéristique.} \end{cases}$$

3) La solution générale de l'équation complète est obtenue en sommant la solution générale de l'équation sans second membre et la solution particulière de l'équation complète.

Chapitre 12

Notations

E	espace vectoriel de dimension n
$\mathbb{R}_n[X]$	espace vectoriel des polynômes à une indéterminée de degré inférieur ou égal à n
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*resp.* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)	espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (resp. complexes)
$\mathcal{L}(E,F)$	espace vectoriel des applications linéaires de E à valeurs dans F
Im	image d'une application linéaire
$\ker$	noyau d'une application linéaire
Sp	spectre (*i.e.* ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice)
card	cardinal d'un ensemble
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$	vecteur de $\mathbb{R}^n$
Id_E	application identité de E
I_n	matrice identité d'ordre n
$\{e_1, \ldots, e_n\}$	base canonique de E
$\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$	base duale de E
$\mathrm{vect}\ \{e_1, \ldots, e_p\}$	espace vectoriel par $\{e_1, \ldots, e_p\}$
$\langle .,. \rangle$	crochet de dualité ou produit scalaire
PGCD	plus grand diviseur commun
PPCM	plus petit multiple commun

$\circ$	loi de composition des endomorphismes
u^n	$\underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{n \text{ fois}}$ composée $n^{ième}$ de u
A^n	$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}}$ puissance $n^{ième}$ de la matrice A
P^T	transposée de la matrice P
P^{-1}	inverse de la matrice P
dim	dimension d'un espace vectoriel
det	déterminant
rg	rang
deg	degré d'un polynôme
e^A	exponentielle de la matrice A

Damien Étienne

Exercices corrigés d'algèbre linéaire

Tome 2

« Réviser, s'exercer, s'évaluer : retrouvez le programme de deuxième année (L2) des licences scientifiques sous forme de rappels de cours et d'exercices corrigés »

Ce livre a été élaboré à partir des cours et travaux dirigés d'algèbre linéaire donnés par l'auteur. Il est le fruit de plusieurs années d'expérience de l'enseignement de l'algèbre linéaire en licences scientifiques et de réflexion sur cet enseignement. L'accent a été mis sur la clarté et la simplicité de la présentation des notions abordées et sur l'utilisation de méthodes autant que possible « passe-partout » pour la résolution des exercices proposés.

Un seul but : permettre à l'étudiant un travail autonome, efficace et en phase avec ce qu'on lui demande en deuxième année.

Chaque chapitre commence par des rappels de cours clairs et synthétiques pour remettre en mémoire les notions nécessaires à la résolution des exercices proposés. Ces rappels de cours peuvent aussi permettre à l'étudiant d'assimiler le cours ou de l'aider à préparer ses fiches mémoire. Les énoncés des exercices sont regroupés après le résumé du cours. L'étudiant peut ainsi chercher une solution pour chacun d'eux et ensuite la comparer avec le corrigé-type qui se trouve quelques pages plus loin.

Sommaire du tome 2 : diagonalisation des endomorphismes, réduction de Jordan, polynômes d'endomorphismes, dualité, formes quadratiques, application des formes quadratiques à l'étude des coniques, produit scalaire euclidien, matrices orthogonales, espaces affines barycentre, sujets d'examen, annexes.

+

Les « plus »

- Les exercices ont été choisis de façon à couvrir l'ensemble des notions développées dans chaque chapitre.
- Des sujets de contrôle permettent à l'étudiant de faire le point sur ses connaissances et de se préparer efficacement aux examens.

Damien Étienne, *Professeur agrégé, Docteur en mathématiques, Université de Pau et des Pays de l'Adour.*

Dans le cadre du nouveau Système Européen de Transfert de Crédits (E.C.T.S.), ce manuel couvre **en France** le niveau : Licence 2

En Belgique Baccalauréat 2
En Suisse Bachelor 2
Au Canada Baccalauréat 2

ISBN : 2-8041-5033-X

9 782804 150334

EXCAL 2

Conception graphique : Primo&Primo